EDUARDO TORROJA
OFICINA TECNICA DE INGENIERIA
MADRID

CALCULO DEL PORTICO INFERIOR DEVLA ARQUERIA DE LA ESTACION DE LOS MINISTERIOS

Fecha 12-34.
Núm. 184103.

CALCULO DEL PORTIGO INFERIOR DE LA ARQUERIA DE LA ESTACION DE LOS MINISTERIOS

Cargas que actúan sobre la estructura.-

$P_1 = \frac{89.300 + 73.000}{6} = 27.000$ Kg por metro de largo)

$P_2 = 4.100$ kg

$P_3 = 7.400$ "

$P_4 = 6.000$ "

$P_5 = 4.200$ "

$P_6 = 2.900$ "

$P_7 = 30.000$ "

$P_8 = 18.000$ "

Momentos de inercia

$$a - b = \frac{1,00 \times \overline{1,1}^3}{12} = 0,111 \ m^4$$

$$b - c = \frac{1,00 \times \overline{1,2}^3}{12} = 0,144 \ m^4$$

$$c - d = \frac{1,00 \times \overline{0,65}^3}{12} = 0,023 \ m^4$$

$$d - e = \frac{1,00 \times \overline{0,5}^3}{12} = 0,010 \ m^4$$

Valores de $= \frac{I_0}{I}$ siendo $I_0 = 0,01$

a - b " $= \frac{0,01}{0,111} = 0,09$ c-d " $= \frac{0,01}{0,023} = 0,0435$

b - c " $= \frac{0,01}{0,144} = 0,07$ d-c " $= \frac{0,01}{0,01} = 1,00$

El centro de gravedad del pórtico, consideradas sus piezas con una densidad igual a la inversa de su momento de inercia, será:

a-b = 2 x 4,10 x 0,09	= 0,74	x 2,05	= 1,52
b-c = 2 x 1,10 x 0,07	= 0,15	x 4,25	= 0,64
c-d = 2 x 2,10 x 0,435	= 1,84	x 4,55	= 8,40
d-e = 2 x 1,75 x 1,00	= 3,50	x 4,70	= 16,50
	6,23		27,06

$$6,23 \times h = 27,06$$

$$h = \frac{27,06}{6,23} = 4,35 \text{ mts.}$$

Los valores de las reacciones de apoyo, desconocidas, suponiendo libre el apoyo a y empotrado el j, tienen por expresión referidas al centro de gravedad.

$$M_o = - \frac{\int M\, r\, d\ell}{\int r\, d\ell}$$

$$X_o = + \frac{\int M\, r\, y\, d\ell}{\int r\, y^2 d\ell}$$

$$Y_o = - \frac{\int M\, r\, x\, d\ell}{\int r\, x^2 d\ell}$$

Para hallar el valor de $\int M\, r\, d\ell$, bastará tomar momentos respecto al punto de aplicación de cada fuerza, de los situados a la izquierda, hallar los arcos representados por estos momentos, correspondientes a cada trozo del pórtico y multiplicar por los r de cada pieza, así:

Momentos:

c = 27.000 x 1,10	= - 29.500 kg
d = 27.000 x 3,20 + 4.100 x 2,10	= - 94,600 "
e = 27.000 x 4,90 + 4.100 x 3,80 + 7.400 x 1,75	= -160.600 "

f = 27.000 x 6,65 + 4.100 x 5,60 + 7.400 x 3,50+
+ 6.000 x 1,72 = - 239.400

g = 27.000 x 8,75 + 4.100 x 7,70 + 7.400 x 5,60+
+ 6.000 x 3,80 + 4.200 x 2,10 = - 341,000

h = 27.000 x 9,8 + 4.100 x 8.80 + 7.400 x 6,65 +
+ 6.000 x 4.90 + 4.200 x 3.20 + 2.900 x 1,1 = - 396,700

i = 27.000 x 9,8 + 4.100 x8,80 + 7.400 x6,65 +
+ 6.000 x 4.90 + 4.200 x 3.20 + 2.900 x 1,1 = - 396.700

j = 27;000 x 9,8 + 4.100 x 8.80 + 7.400 x 6,65+
+ 6.000 x 4.90 + 4.200 x 3.20 + 2.900 x 1,1 +
+ 18.000 x 2,8 = - 446,700

<u>Areas multiplicadas por r</u>

b-c = 14.750 x 1,10	= - 16.200x0,07	= - 1.140	m^2kg
c-d = (14.750+47.300)x2,10	= - 131.000x0,435	= - 57.200	"
d-e = (47.300+80.300)x1,75	= - 221.000x1,00	= - 221.000	"
e-f = (80.300+119.700)x1,75	= - 350.000x1,00	= - 350.000	"
f-g = (119.700+170.500)x2,10	= - 610.000x0,435	= - 266.000	"
g-h = (170.500+198.350)x1,10	= - 405.000x0,07	= - 28.200	"
h-i = 396.700 x 1,35	= - 535.000x0,09	= - 48.000	"
i-j = (198.350+223.350)x2,75	= -1160.000x0,09	= - 105.000	"
	$\int M\ r\ dl$	= - 1.076.540	"

Para el valor de M r y d , nos bastará multiplicar las cantidades anteriores, por las distancias desde las proyecciones de los centros de gravedad de las áreas salve la directriz hasta el eje XX.

b-c = - 1.140 x 0 =	0
c-d = -57.200 x 0,25 = -	14.200
d-e = 221.000 x 0,37 = -	82.000
e-f = 350.000 x 0,37 = -	130.000

f-g = - 266.000 x 0,20 = - 53.500

g-h = - 28.200 x - 0,10 + 2.820

h-i = - 48.000 x - 1.00 + 48.000

i-j = -105.000 x - 3.10 +325.000

$\int M\, r\, y\, d\ell$ = 375.820 - 279.700=+96.120 m^3Kg

y para el de $\int M\, r\, x\, d\ell$ por las distancias al eje Y - Y

b-c = - 1.140 x - 4,25 = + 4.850

c-d = - 57.200 x - 2.65 = +105.200

d-e = -221.000 x - 0,85 = +188.000

e-f = -350.000 x 0,92 = - 321.000

f-g = -266.000 x 2.80 = - 750.000

g-h = - 28.200 x 4.35 = - 124.000

h-i = - 48.000 x 4.90 = - 235.000

i-j = -105.000 x 4.90 = - 515.000

$\int M\, r\, x\, d\ell$ =+298.050-1.945.000 = - - 1.646.950 m^2Kg

Con esto tenemos los tres numeradores, los denominadores son:

El de m_{o1}

a-b = 4.10 x 2 x 0,090 = 0,74

b-c = 1,10 x 2 x 0,070 = 1,54

c-d = 2,10 x 2 x 0,435 = 1,84

d-e = 1,75 x 2 x 1,00 = 1,75

$\int r\, d\ell$ = 5,87 m.

El de X_o

a-b $\frac{4,10}{3} \times 2 \times 0,09\ (\overline{4,3}^2 + \overline{0,25}^2 + 4,3 \times 0,25) =$ 4.800 m^3

b-c $\frac{1,10}{3} \times 2 \times 0,07\ (\overline{0,25}^2 + \overline{0,10}^2 - 0,25 \times 0,10) =$ 0.005 m^3

$$c\text{-}d = \frac{2,10}{3} \times 2 \times 0,435\ (\overline{0,1}^2 + \overline{0,35}^2 + 0,1 \times 0,35) = \qquad 0,098\ m^3$$

$$d\text{-}e = \frac{1,75}{3} \times 2 \times 1\ (\overline{0,35}^2 4\ \overline{0,40}^2 + 0,35 \times 0,40) = \qquad 0.500\ m^3$$

$$\int r\ y^2\ d\ell = \qquad 5.403\ m^3$$

y el de Y_o

$$a\text{-}b = \frac{4,10}{3} \times 2 \times 0,09\ (3 \times \overline{4,9}^2) = \qquad 17.600\ m^3$$

$$b\text{-}c = \frac{1,10}{3} \times 2 \times 0,07\ (\overline{4,9}^2\ 4\ \overline{3,85}^2 + 4,9 \times 3,85) = \qquad 2.910\ m^3$$

$$c\text{-}d = \frac{2,10}{3} \times 2 \times 0.435\ (\overline{3,85}^2 + \overline{1,75}^2 + 3,85 \times 1,75) = \qquad 14.600\ m^3$$

$$d\text{-}e = \frac{1,75}{3} \times 2 \times 1\ (\overline{1,75}^2) = \qquad 3.600\ m^3$$

$$\int r\ x^2\ d\ell = \qquad 38.710\ m^3$$

Con lo cual, los valores de los componentes de la reacción del apoyo ~~e~~ a referidos al centro de gravedad son:

$$M_o = - \frac{\int M\ r\ d\ell}{\int r\,d\ell} = - \frac{1.076.000\ m^2 kg}{5.87} = + \quad 185.000\ Mkg.$$

$$X_o = + \frac{\int M\ r\ y\ d\ell}{\int r y^2 d\ell} = + \frac{96.120\ m^3\ kg}{5.403\ m^3} = + \quad 17.800\ Kg.$$

$$Y_o = - \frac{\int M\ r\ x\ d\ell}{\int r\ x^2\ d\ell} = - \frac{1.646.950\ m^3 kg}{38.71\ m^3} = + \quad 42.500\ Kg$$

y referidos al arranque a, teniendo en cuenta el par de traslado, serán:

$$M_A = 185.000 + 17.800 \times 4,35 - 42.500 \times 4,90 = + \quad 55.500\ mKg$$

$$X_a = X_o = C + 17.800$$

$$Y_a = Y_o = + 42.500$$

Con estos datos podemos calcular los momentos en los siguientes puntos:

M_b = 4 55.500 - 17.800 x 4,10 = - 17.500 mKg.

M_e = + 55.500+42.500x4.90-17.800x4,75 -
- 27.500x4,90 -4.100x3,85-7.400x1,75 = + 15.600 mkg.

M_h = 55.500+42.500x9,80-17.800x4,10-
- 27.500x9,80-4.100x8,75-7.400x6,65-
- 6.000x4,9-4.200x3,15-2.900x1,05 = - 2.700 "

M_j = + 471.500-450.700 =+ = + 21.800 "

Repitiendo el cálculo del pórtico bajo la hipótesis de tener el extremo a articulado, empezaremos por suponer que la longitud de la pieza a-b, aumenta en 1/2 de su longitud, y que en el extremo virtual a asi obtenido, existe un empotramiento con lo cual tendremos en el punto a o sea a 1/3 de la altura total de esta pieza virtual, un punto de momento nulo.

Para esto empezaremos por determinar nuevamente la altura del centro de gravedad respecto al punto a'.

a'-b	= 1x6,15x0,09	= 0,55x3,07	=	1,69
h - j	=1x4,10x0,09	= 0,37x4,10	=	1,52
b-c	= 2x1,10x0,07	= 0,15x6,30	=	0,94
c-d	= 2x2,10x0,485	=1,84x6,60	=	12,20
d-e	= 2x1,75x1,00	= 3,50x6,75	=	23,60
		6,41		39,95

$$6,41 \times h = 39,95$$

$$h = \frac{39,95}{6,41} = 6,20 \text{ mts.}$$

Los momentos respecto al extremo j, de todos los esfuerzos exteriores, serán también iguales.

Por lo tanto M r d , continuará teniendo el valor

$$\int M\, r\, d\ell = -\ 1.076.540\ m^2\ kg$$

Los productos de las áreas de momentos por las distancias al eje X que pasa por el centro de gravedad habrán cambiado por cambiar este y serán:

b-c =	- 1.140 x	0,20 =		- 230
c-d =	- 57.200 x	0,45 =		- 25.800
d-e =	-221.000 x	0,58 =		- 129.000
e-f =	-350.000 x	0,57 =		-200.000
f-g =	-266.000 x	0,42 =		- 112.000
g-h =	- 28.200 x	0,14 =		- 3.900
h-i =	- 48.000 x-	0,70 =	33.500	
i-j =	-105.000x-	2.82 =	296.000	

$$\int M\, r\, y\, d\ell \qquad = 329.500 - 470.930 = -141.430\ m^3 kg$$

Respecto al eje Y no hay variación ninguna quedando por tanto

$$\int M\, r\, \rho\, d\ell = -\ 1.646,950\ m^3 kg$$

En cuanto a los denominadores, el de m_o se convertirá en:

a'-b	1 x 6,15 x 0,090	=	0,55
b-c	2 x 1,10 x 0,07	=	1,54
c-d	2 x 2,10 x0,435	=	1,84
d-e	2 x 1,75 x1,00	=	1,75
e-f	1 x 4,1 x 0,09	=	0,37

$$\int r\, d\ell \qquad = \qquad 6,05 \text{ mts.}$$

El de X_o

$$a'-b = \frac{6,15}{3} \times 1 \times 0,09\ (6,15)^2 = \qquad 7.000$$

$$b-c = \frac{1,10}{3} \times 2 \times 0,07\ (0,30)^2 = \qquad 0,004$$

$$c-d = \frac{2,10}{3} \times 2 \times 0,435(\overline{0,3}^2+\overline{0,55}^2+0,3\times 0,55) = \qquad 0,335$$

$$d-e = \frac{1,75}{3} \times 2 \times 1,00(\overline{0,5}^2+0,\overline{65}^2+0,5\times 0,65) = \qquad 1.160$$

$$h-j = \frac{4,10}{3} \times 1 \times 0,09\ (4,10)^2 = \qquad \underline{2.050}$$

$$r\, y^2\, d = \qquad 10.549\ m^3$$

El de Y_o no varía

$$\int r\, x^2\, d\ell = 38.710\ m^3$$

y por lo tanto los valores de los componentes de la reacción en el extremo a referidos al centro de gravedad, son:

$$M_o = -\frac{\int M\, r\, d\ell}{\int r\, d\ell} = -\frac{-1.076,540\ m^2\ kg}{6.05\ m.} = +\ 176.000\ mKg.$$

$$X_o = +\frac{\int M\, r\, y\, d\ell}{\int r y^2 d\ell} = +\frac{-141.430\ m^3\ kg}{10.549} = -\ 13.500\ \text{"}$$

$$Y_o = -\frac{\int M\, r\, x\, d\ell}{\int r\, x^2\, d\ell} = -\frac{-1.646,950\ m^3 kg}{38,710\ m^3} = +\ 43.500\ \text{"}$$

que trasladadas al arranque a son:

$M_a = +\ 176.000 - 13.500 \times 6,2 - 43.500 \times 4,9 = -\ 120.000$ mkg

$X_a = X_o = -\ 13.500$ Kg

$Y_a = Y_o = +\ 43.500$ Kg

con lo cual podemos calcular los momentos en los puntos siguientes:

M_b = - 120.000 +13.500x6,20 = - = - 36.000 mKg.

M_e = - 120.000 -27.500x4.90 - 4.100x3,85-
-7.400x1,75+13.500x6,85+43.500x4,90 = + 21.400 "

M_h = - 120.000-27.500x9.80-4.100x8,75-7.400x
x 6,65-6.000x4,9-4.200x3,15-2.900x1,05
+ 13.500x6,85+43.500x9,80 = - 18.300 "

M_j = - 536.300-18.000x2,70+13.500x2,05+
+43.500x9,8 = -130.800 "

Repitiendo el cálculo para el caso de no actuar el empuje de tierras (P 8) tendremos:

Momentos de las fuerzas exteriores, los mismos, menos el correspondiente a P 8.

Areas de momentos multiplicados por r:

b-c = - 1.140 m^2kg
c-d = - 57.200 "
d-e = - 221.000 "
e-f = - 350.000 "
f-g = - 266.000 "
g-h = - 28.200 "
h-j = - <u>145.000</u> " = (396.700x4,10x0,09)

$\int Mrd\ell$ = - 1.068,540 m^2kg

y los productos por las distancias al eje X:

b-c		-	0
c-d		-	14.200
d-e		-	82.000
e-f		-	130.000
f-g		-	53.500
g-h	+ 2.800	-	

$$h - j = - 145.000 \times - 2{,}05 = \underline{+ \ 296.000}$$

$$\int M\, r\, y\, d\ell = + \ 298.800 - 279.700 = +19.100 \ m^3kg$$

Respecto al eje Y:

b-c	+ 48.500	
c-d	+105.200	
d-e	+188.000	
e-f		- 321.000
f-g		- 750.000
g-h		- 124.000
h-j = - 145.000 x 4.90 =		- 710.000

$$\int M\, r\, x\, d\ell = 298.050 - 1.905.000 = -1.607.950 \ m^3kg$$

Los denominadores, no varian y por lo tanto el valor de los componentes de la reacción del apoyo **a** referidos al centro de inercia serán:

$$M_o = - \frac{\int M\, r\, d\ell}{\int r\, d\ell} = - \frac{-1.068.540 \ m^2kg}{5.87 \ m.} = + \ 181.000 \ mkg$$

$$Xo = + \frac{\int M\, r\, y\, d\ell}{\int r\, y^2\, d\ell} = + \frac{+19.100 \ m^3kg}{5.403 \ m^3} = + \ 3.500 \ kg$$

$$Y_o = - \frac{\int M\, r\, x\, d\ell}{\int r\, x^2\, d\ell} = - \frac{-1.607.950 \ m3kg}{38{,}71 \ m^3} = + \ 42.000 \ kg$$

que trasladadas al apoyo **a** son:

$$M_a = 181.000 + 3.500 x 4{,}35 - 42.000 x 4{,}9 = - \quad 9.000 \ mts.$$

$$X_a = X_o = + \ 3.500 \ kg.$$

$$Y_a = Y_o = + \ 42.000 \ kg.$$

con lo cual los momentos en los puntos siguientes, se convierten en:

M_b = - 9.000-3.500x4,10 = - 23.400 mkg

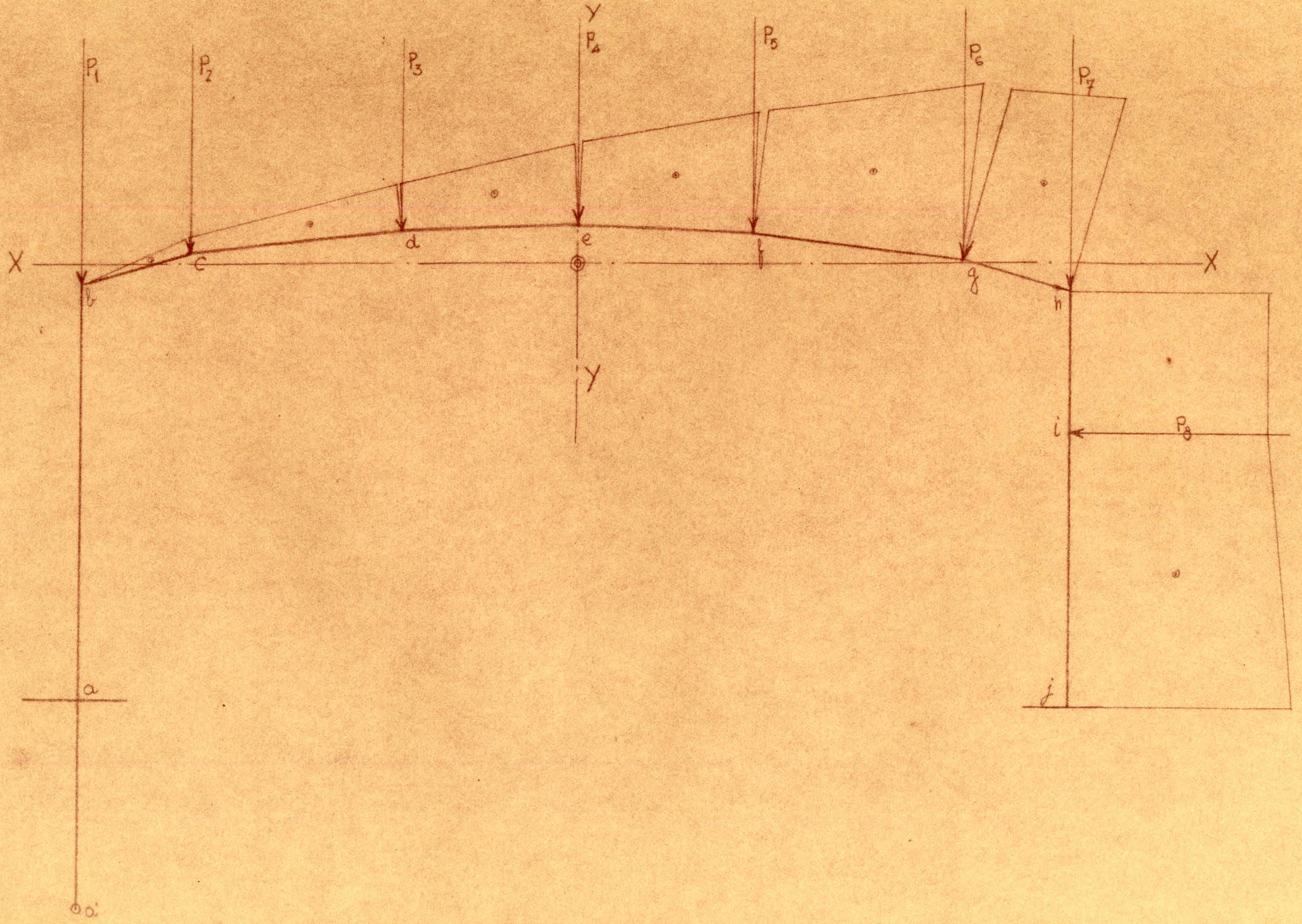
M_e = - 9.000-3.500x4,75-27.500x4,9-
-4.100x3,85-7.400x1,75+42.000x
x4,90 = + 16.600 "

M_h = - 9.000-27.500x9,8-4.100x8,75-
-7.400x6,65-6.000x4,9-4.200x
x3,15-2.900x1,05 -3.500x4,1 +
+ 42.000 x 9,80 = - 13.900 mkg

M_j = - 410.600+410.000 = - 600 mkg

Los resultados de las tres hipótesis calculadas son los siguientes:

Puntos	1ª hipótesis	2ª hipótesis	3ª hipótesis
a′		-120.000 mkg	
a	+55.500 mkg		- 9.000 mkg
b	-17.500 "	- 36.000 "	-23.400 "
e	+15.600 "	+ 21.400 "	+16.600 "
h	- 2.700 "	- 18.000 "	-13.900 "
j	+21.800 "	+130.000 "	- 6.000 "



Y
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
X
X
b
c
d
e
f
g
h
Y
i
P8
a
j
a'