

EDUARDO TORROJA
OFICINA TECNICA DE INGENIERIA
MADRID

Cálculo del portico inferior de la
arquitectura de la edificación de los ministerios.

Fecha 12-34.
Núm. 184.518.

Perqueria del Hipodromo

Parte sobre la Estacion
de los Ministerios

Calculos

$$110,000 \times \frac{9^2}{12} = 750,000 \text{ m}^2 \text{ Kg}$$

$$R = \frac{150,000 \times 2,75}{4} = 104,000 \text{ Kg}$$

m

Calculo aproximado de los cargas que actúan sobre el estillo de la Estacion de los ministerios

Forjado y cubiertas

→	$5,00 \times 0,40 \times 2,400 \times 6,00 =$	28,700,000 Kg	
Comisa	$0,60 \times 0,80 \times 6 \times 2,400 =$	6,900,000 "	
Arcoes	$1,50 \times 0,80 \times 6 \times 2,400 =$	17,200,000 "	
"	$\frac{1,70 + 4,40}{2} \times 2,15 \times 0,80 \times 2400 =$	12,500,000 "	
Pilares	$1,80 \times 0,8 \times 7,00 \times 2400 =$	24,000,000 "	89,300
Boveda	$0,70 \times 6 \times 5,00 \times 2400 =$	50,500,000 "	
Salvecaya	$1,000 \times 5,00 \times 6,00 =$	30,000,000 "	
Muro de boveda	$1,1 \times 6,00 \times 46 \times 2400 =$	76,000,000 "	
		<u>245,800,000 "</u>	41,000 kg
		6	

Boveda inferior	$0,7 \times 6 \times 5 \times 2400 =$	50,500,000 kg	
Salvecaya	$1000 \times 5,00 \times 6,00 =$	30,000,000 "	
		<u>80,500,000</u>	13,500 kg
		6	

Entub. boveda inferior

#	$1,10 \times 6,00 \times 3,00 \times 2400 =$	47,500,000 kg
	$1,80 \times 6,00 \times 1,50 \times 2400 =$	39,000,000 "
	$2,60 \times 0,700 \times 6,00 \times 2400 =$	26,500,000 "

$\frac{113,000,000}{6} = 19,000$ kg

- P₁ = 41 Tons/m²
- P₂ = 13 " "
- P₃ = 73 " "

73000
26000

Cargas ↓

$$P_1 = \frac{89.300 + 73.000}{6} = 27.000 \text{ Kg (por metro de largo)}$$

$$P_2 = 4.100 \text{ Kg}$$

$$P_3 = 7.400 \text{ ''}$$

$$P_4 = 6.000 \text{ ''}$$

$$P_5 = 4.200 \text{ ''}$$

$$P_6 = 2.900 \text{ ''}$$

$$P_7 = 30.000 \text{ ''}$$

$$P_8 = 18.000 \text{ ''}$$

83 200
 27
 11 0,000

0,16
 -0,216

Moments de inercia

$$a-b = \frac{1,00 \times 1,7^3}{12} = 0,111 \text{ m}^4 \quad \text{then}$$

$$b-c = \frac{1,00 \times 1,2^3}{12} = 0,144 \text{ m}^4$$

$$c-d = \frac{1,00 \times 0,65^3}{12} = 0,023 \text{ m}^4$$

$$d-e = \frac{1,00 \times 0,5^3}{12} = 0,010 \text{ m}^4$$

Valores de $r = \frac{I_0}{I}$ siendo $I_0 = 0,01$

$$a-b \text{ '' } r = \frac{0,01}{0,111} = 0,09$$

$$c-d \text{ '' } r = \frac{0,01}{0,023} = 0,435$$

$$b-c \text{ '' } r = \frac{0,01}{0,144} = 0,07$$

$$d-e \text{ '' } r = \frac{0,01}{0,01} = 1,00$$

El centro de gravedad del portico, considerando sus piezas con una densidad igual a la inversa de su momento de inercia, será:

$$\begin{array}{r}
 a-b = 2 \times 4,10 \times 0,09 = 0,74 \quad \times 2,05 = 1,52 \\
 b-c = 2 \times 1,10 \times 0,07 = 0,15 \quad \times 4,25 = 0,64 \\
 c-d = 2 \times 2,10 \times 0,435 = 1,84 \quad \times 4,55 = 8,40 \\
 d-e = 2 \times 1,75 \times 1,00 = 3,50 \quad \times 4,70 = 16,50 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 6,23 \qquad \qquad \qquad 27,06
 \end{array}$$

$$6,23 \times h = 27,06$$

$$h = \frac{27,06}{6,23} = 4,35 \text{ mts}$$

Los valores de las reacciones de apoyo, descomponidas, suponiendo libre el apoyo a y empotrado el f, tienen por expresion, referidas al centro de gravedad:

$$\underline{u}_0 = - \frac{\int M_r d l}{\int r d l} = \text{---}$$

$$\underline{X}_0 = + \frac{\int M_r y d l}{\int r y^2 d l}$$

$$\underline{Y}_0 = - \frac{\int M_r x d l}{\int r x^2 d l}$$

Para hallar el valor de $\int M_r d l$, bastaría

tomar momentos respecto al ~~la base~~ punto de aplicacion de cada fuerza, de los situados a la izquierda, hallar las areas representadas por estos momentos, correspondientes a cada trazo del poligono y multiplicar por los r de cada pieza. Asi:

~~c = P1~~

$c = 27,000 \times 1,10$

$d = 27,000 \times 3,20 + 4,100 \times 2,10$

$e = 27,000 \times 4,90 + 4,100 \times 3,80 + 7,400 \times 1,75$

$f = 27,000 \times 6,65 + 4,100 \times 5,60 + 7,400 \times 3,50 + 6,000 \times 1,72$

$g = 27,000 \times 8,75 + 4,400 \times 7,70 + 7,400 \times 5,60 + 6,000 \times 3,80 + 4,200 \times 2,10$

$h = 27,000 \times 9,80 + 4,100 \times 8,75 + 7,400 \times 6,65 + 6,000 \times 4,90 + 4,200 \times 3,15 + 29,000 \times 1,10$

Momentos

$c = 27,000 \times 1,10$	$= -29,500$	<u>mkg</u>
$d = 27,000 \times 3,20 + 4,100 \times 2,10$	$= -94,600$	
$e = 27,000 \times 4,90 + 4,100 \times 3,80 + 7,400 \times 1,75$	$= -160,600$	
$f = 27,000 \times 6,65 + 4,100 \times 5,60 + 7,400 \times 3,50 + 6,000 \times 1,72$	$= -239,400$	
$g = 27,000 \times 8,75 + 4,400 \times 7,70 + 7,400 \times 5,60 + 6,000 \times 3,80 + 4,200 \times 2,10$	$= -341,000$	
$h = 27,000 \times 9,80 + 4,100 \times 8,80 + 7,400 \times 6,65 + 6,000 \times 4,90 + 4,200 \times 3,20 + 29,000 \times 1,10$	$= -396,700$	
$i = 27,000 \times 9,80 + 4,100 \times 8,80 + 7,400 \times 6,65 + 6,000 \times 4,90 + 4,200 \times 3,20 + 29,000 \times 1,10$	$= -396,700$	
$j = 27,000 \times 9,80 + 4,100 \times 8,80 + 7,400 \times 6,65 + 6,000 \times 4,90 + 4,200 \times 3,20 + 29,000 \times 1,10 + 18,000 \times 2,80$	$= -446,700$	

areas, multiplicadas por r

$b-c = 14,750 \times 1,10$	$= -16,200 \times 0,07$	$= -1,140$	$\text{mm}^2 \text{Kg}$
$c-d = (14,750 + 47,300) \times 2,10$	$= -131,000 \times 0,435$	$= -57,200$	"
$d-e = (47,300 + 80,300) \times 1,75$	$= -221,000 \times 1,00$	$= -221,000$	"
$e-f = (80,300 + 119,700) \times 1,75$	$= -350,000 \times 1,00$	$= -350,000$	"
$f-g = (119,700 + 170,500) \times 2,10$	$= -610,000 \times 0,435$	$= -266,000$	"
$g-h = (170,500 + 198,350) \times 1,10$	$= -405,000 \times 0,07$	$= -28,200$	"
$h-i = 396,700 \times 1,35$	$= -535,000 \times 0,09$	$= -48,000$	"
$i-j = (198,350 + 223,350) \times 2,75$	$= -1,160,000 \times 0,09$	$= -105,000$	"

$\int M r d l = -1,076,540 \text{ mm}^2 \text{Kg}$

Para el valor de $\int Mr y dl$, nos bastará multiplicar las cantidades anteriores, por las distancias desde las proyecciones de los centros de gravedad de los arcos sobre la directriz, como el eje XX

$$\begin{aligned}
 b-c &= -1.140 \times 0 = 0 \\
 c-d &= -57,200 \times 0,25 = -14,200 \\
 d-e &= -221,000 \times 0,37 = -82,000 \\
 e-f &= -350,000 \times 0,37 = -130,000 \\
 f-g &= -266,000 \times 0,20 = -53,500 \\
 g-h &= -28,200 \times -0,10 = +2,820 \\
 h-i &= -48,000 \times -1,00 = +48,000 \\
 i-j &= -105,000 \times -3,10 = +325,000
 \end{aligned}$$

$$\int Mr y dl = +375,820 - 279,700 = +96,120 \text{ m}^3 \text{ kg}$$

y para el de $\int Mr x dl$ por las distancias al eje Y-Y.

$$\begin{aligned}
 b-c &= -1.140 \times -4,25 = +4,850 \\
 c-d &= -57,200 \times -2,65 = +105,200 \\
 d-e &= -221,000 \times -0,85 = +188,000 \\
 e-f &= -350,000 \times 0,92 = -321,000 \\
 f-g &= -266,000 \times 0,80 = -212,800 \\
 g-h &= -28,200 \times 4,75 = -124,000 \\
 h-i &= -48,000 \times 4,90 = -235,000 \\
 i-j &= -105,000 \times 4,90 = -515,000
 \end{aligned}$$

$$\int Mr x dl = +298,050 - 1,945,000 = -1,646,950 \text{ m}^3 \text{ kg}$$

Con esto tenemos los tres numeradores, los denominadores son:

El de $\#_1$ m_0 , ~~fract.~~

$$a-b = 4,10 \times 2 \times 0,090 = 0,74$$

$$b-c = 1,10 \times 2 \times 0,070 = 1,54$$

$$c-d = 2,10 \times 2 \times 0,435 = 1,84$$

$$d-e = 1,75 \times 2 \times 1,00 = 1,75$$

$$\int r dl = 5,87 \text{ m.}$$

El de X_0

$$a-b = \frac{4,10}{3} \times 2 \times 0,09 \left(4,3^2 + 0,25^2 + 4,3 \times 0,25 \right) = 4,800 \text{ m}^3$$

$$b-c = \frac{1,10}{3} \times 2 \times 0,07 \left(0,25^2 + 0,10^2 - 0,25 \times 0,10 \right) = 0,005 \text{ m}^3$$

$$c-d = \frac{2,10}{3} \times 2 \times 0,435 \left(0,1^2 + 0,35^2 + 0,1 \times 0,35 \right) = 0,098 \text{ m}^3$$

$$d-e = \frac{1,75}{3} \times 2 \times 1 \left(0,35^2 + 0,40^2 + 0,35 \times 0,40 \right) = 0,500 \text{ m}^3$$

$$\int r y^2 dl = 5,403 \text{ m}^3$$

y el de Y_0 .

$$a-b = \frac{4,10}{3} \times 2 \times 0,09 \left(3 \times 4,9^2 \right) = 17,600 \text{ m}^3$$

$$b-c = \frac{1,10}{3} \times 2 \times 0,07 \left(4,9^2 + 3,85^2 + 4,9 \times 3,85 \right) = 2,910 \text{ m}^3$$

$$c-d = \frac{2,10}{3} \times 2 \times 0,435 \left(3,85^2 + 1,75^2 + 3,85 \times 1,75 \right) = 14,600 \text{ m}^3$$

$$d-e = \frac{1,75}{3} \times 2 \times 1 \left(1,75^2 \right) = 3,600 \text{ m}^3$$

$$\int r x^2 dl = 38,710 \text{ m}^3$$

Con lo cual, los valores de los componentes de la reacción del apoyo a referidos al centro de gravedad son!

$$M_0 = - \frac{\int M_{rdl}}{\int r_{rdl}} = - \frac{-1026,000 \text{ m}^2 \text{ Kg}}{5,87 \text{ m}} = + 185,000 \text{ m Kg}$$

$$X_0 = + \frac{\int M_{rydl}}{\int r_{y^2dl}} = + \frac{+96,120 \text{ m}^3 \text{ Kg}}{5,403 \text{ m}^3} = + 17,800 \text{ Kg}$$

$$Y_0 = - \frac{\int M_{rxdl}}{\int r_{x^2dl}} = - \frac{-1,646,950 \text{ m}^3 \text{ Kg}}{39,71 \text{ m}^3} = + 42,500 \text{ Kg}$$

y referidos al arranque a, teniendo en cuenta el por de traslado, serán:

$$M_A = 185,000 + 17,800 \times 4,35 - 42,500 \times 4,90 = ~~52,000~~ + 55,500 \text{ m Kg}$$

8φ30

$$X_a = X_0 = + 17,800$$

$$Y_a = Y_0 = + 42,500$$

Con estos datos podemos calcular los momentos en los siguientes puntos

$$M_b = + 55,500 - 17,800 \times 4,10 = - 17,500 \text{ m Kg} - 71,000$$

3φ30

$$M_c = + 55,500 + 42,500 \times 4,90 - 17,800 \times 4,75 - 27,500 \times 4,90 - 4,100 \times 3,85 - 7,400 \times 1,75 = - 40,000 + 15,600 \text{ m Kg}$$

$$M_h = + 55,500 + 42,500 \times 9,80 - 17,800 \times 4,10 - 27,500 \times 9,80 - 4,100 \times 8,75 - 7,400 \times 6,65 - 6,000 \times 4,9 - 4,200 \times 3,15 - 2,900 \times 1,05 = - 2,700 \text{ m Kg}$$

6φ30

$$M_j = + 471,500 - 450,700 = + 21,800 \text{ m Kg}$$

208
555
63
845
135.4
15
129
209

735
171

208
555
63
845
135.4
15
129
209

Repetiendo el cálculo del portico bajo la hipótesis ~~de~~ de tener el extremo a articulado, empezaremos por suponer que la longitud de la pieza a-b, aumenta en $\frac{1}{2}$ de su longitud, ~~en~~ y que en el extremo virtual a' así obtenido, existe un empotramiento, con lo cual tendremos en el punto a o sea a $\frac{1}{3}$ de la altura total de esta pieza virtual, un punto de momento nulo.

Para esto empezaremos por determinar ~~la~~ nuevamente la altura del centro de gravedad respecto al punto a'.

$$a'-b = 1 \times 6.15 \times 0.09 = 0.55 \times 3.07 = 1.69$$

$$b-f = 1 \times 4.10 \times 0.09 = 0.37 \times 4.10 = 1.52$$

$$f-c = 2 \times 1.10 \times 0.07 = 0.15 \times 6.30 = 0.94$$

$$c-d = 2 \times 2.10 \times 0.435 = 1.84 \times 6.60 = 12.20$$

$$d-e = 2 \times 1.75 \times 1.00 = 3.50 \times 6.75 = 23.60$$

$$\underline{6.41}$$

$$\underline{39.95}$$

$$6.41 \times h = 39.95$$

$$h = \frac{39.95}{6.41} = 6.20 \text{ m}$$

Los momentos respecto al extremo f, si todos los fuerzas exteriores, no varían y las áreas de momento, serán ~~las~~ también iguales, ~~seman~~

Por lo tanto $\int Mr d l$, continuará teniendo el valor

$$\int Mr d l = -1.076,540 \text{ m}^2 \text{ Kg}$$

Los productos de los areas de momentos por las distancias a los ejes X ~~que~~ que pasan por el centro de gravedad, habrán cambiado por cualquier otro y serán:

$$b-c = -1.140 \times 0,20 = -228$$

$$c-d = -57,200 \times 0,45 = -25,800$$

$$d-e = -221,000 \times 0,58 = -129,000$$

$$e-f = -350,000 \times 0,57 = -200,000$$

$$f-g = -266,000 \times 0,42 = -112,000$$

$$g-h = -28,200 \times 0,14 = -3,900$$

$$h-i = -48,000 \times -0,70 = 33,500$$

$$i-j = -105,000 \times -2,82 = 296,000$$

$$\int Mr y d l = 329,500 - 470,920 = -141,420 \text{ m}^3 \text{ Kg}$$

Respecto al eje Y no hay variación ninguna quedando por tanto

$$\int Mr x d l = -1.646,950 \text{ m}^3 \text{ Kg}$$

En cuanto a los denominadores, el de m_0 se convertirá en:

$$\begin{aligned}
 a'-b &= 1 \times 6,65 \times 0,090 = 0,55 \\
 b-c &= 2 \times 1,10 \times 0,07 = 1,54 \\
 c-d &= 2 \times 2,10 \times 0,435 = 1,84 \\
 d-e &= 2 \times 1,75 \times 1,00 = 1,75 \\
 e-f &= 1 \times 4,1 \times 0,09 = 0,37 \\
 \int r dl &= 6,05 \text{ m}
 \end{aligned}$$

El de X_0

$$a'-b = \frac{6,15}{3} \times 1 \times 0,09 (6,15)^2 = 7,000$$

$$b-c = \frac{1,10}{3} \times 2 \times 0,07 (0,30)^2 = 0,004$$

$$c-d = \frac{2,10}{3} \times 2 \times 0,435 (0,3^2 + 0,55^2 + 0,3 \times 0,55) = 0,335$$

$$d-e = \frac{1,75}{3} \times 2 \times 1,00 (0,5^2 + 0,65^2 + 0,5 \times 0,65) = 1,160$$

$$e-f = \frac{4,10}{3} \times 1 \times 0,09 (4,10)^2 = 2,050$$

$$\int r y^2 dl = 10,549 \text{ m}^3$$

El de Y_0 no varia

$$\int r x^2 dl = 38,710 \text{ m}^3$$

y por lo tanto los valores de los reacc
componentes de la reaccion en el etre
a', referidos al centro de gravedad, son:

0,009
 0,004
 0,335
 1,160
 2,050

 6,05

$$M_0 = - \frac{\int M r \, dl}{\int r \, dl} = - \frac{-1.076,540 \, m^2 \, Kg}{6,05 \, m} = + 176,000 \, m \, Kg$$

$$X_0 = + \frac{\int M r y \, dl}{\int r y^2 \, dl} = + \frac{-141.430 \, m^3 \, Kg}{10,549} = - 13,500 \, Kg$$

$$Y_0 = - \frac{\int M r x \, dl}{\int r x^2 \, dl} = - \frac{-1646,950 \, m^3 \, Kg}{38,710 \, m^3} = + 43,500 \, Kg$$

que trasladadas al anaquele a' , son:

~~$M_a = M_0$~~

$$M_a = +176,000 - 13,500 \times 6,2 - 43,500 \times 4,9 = -120,000 \, m \, Kg$$

$$X_a = X_0 = -13,500 \, Kg$$

$$Y_a = Y_0 = +43,500 \, Kg$$

Con lo cual podemos calcular los momentos en los puntos siguientes:

$$M_f = -120,000 + 13,500 \times 6,20 = -36,000 \, m \, Kg$$

$$M_e = -120,000 - 27,500 \times 4,90 - 4,100 \times 3,85 - 7,400 \times 1,75 + 13,500 \times 6,85 + 43,500 \times 4,90 = +21,400 \, m \, Kg$$

$$M_h = -120,000 - 27,500 \times 9,80 - 4,100 \times 8,75 - 7,400 \times 6,65 - 6,000 \times 4,9 - 4,200 \times 3,15 - 2,900 \times 1,05 + 13,500 \times 6,85 + 43,500 \times 9,80 = -18,300 \, m \, Kg$$

$$M_j = -536,300 - 18,000 \times 2,70 + 12,500 \times 2,05 + 43,500 \times 9,8 = -150,800 \, m \, Kg$$

84,000
212
296
176
120

93,000
216
305
120,000
135,000
15,000
13,000
283,600
305
2140

Repetiendo el Cálculo, para el caso de no actuar el empuje de tierras (P8) Tendremos:

Momentos de las fuerzas exteriores, los mismos, menos el correspondiente a P8.

Áreas de momentos multiplicadas por γ:

$$b-e = - 1140 \text{ m}^2 \text{ Kg}$$

$$c-d = - 57200 \text{ ''}$$

$$d-e = - 221000 \text{ ''}$$

$$e-f = - 380000 \text{ ''}$$

$$f-g = - 266000 \text{ ''}$$

$$g-h = - 281800 \text{ ''}$$

$$h-j = - 145000 \text{ ''} = (396700 \times 4.10 \times 0.09)$$

$$\int M_{rd} d = - 1068540 \text{ m}^2 \text{ Kg}$$

y los productos por las distancias al eje X:

$$b-e = \text{-----} - 0$$

$$c-d = \text{-----} - 14200$$

$$d-e = \text{-----} - 82000$$

$$e-f = \text{-----} - 130000$$

$$f-g = \text{-----} - 53500$$

~~$$+1 = b-h \quad g-h = \text{-----} + 2800$$~~

~~$$h-j = - 145000 \times - 205 = + 296000$$~~

~~$$\int M_{ry} d = + 298800 - 279700 = + 19100 \text{ m}^2 \text{ Kg}$$~~

Respecto al eje Y:

$$b-c = \text{-----} + 48,500$$

$$c-d = \text{-----} + 105,200$$

$$d-e = \text{-----} + 188,000$$

$$e-f = \text{-----} - 321,000$$

$$f-g = \text{-----} - 750,000$$

$$g-h = \text{-----} - 124,000$$

$$h-f = -145,000 \times 4,90 = \text{-----} - 710,000$$

$$\int M_x \times dl = 298,050 - 1,905,000 = -1,607,950 \text{ m}^3 \text{ Kg}$$

Los denominadores no varían y por lo tanto, el valor de los componentes de la reacción del apoyo a referidos al centro de mercancía será:

$$M_0 = - \frac{\int M_x dl}{\int r dl} = - \frac{-1,607,950 \text{ m}^3 \text{ Kg}}{5,87 \text{ m}} = +181,000 \text{ mKg}$$

$$X_0 = + \frac{\int M_y dl}{\int r^2 dl} = + \frac{+19,100 \text{ m}^2 \text{ Kg}}{5,403 \text{ m}^2} = +3,500 \text{ Kg}$$

$$Y_0 = - \frac{\int M_x \times dl}{\int r^2 dl} = - \frac{-1,607,950 \text{ m}^3 \text{ Kg}}{38,71 \text{ m}^2} = +42,000 \text{ Kg}$$

que trasladadas al apoyo a son:

$$M_a = 181,000 + 3,500 \times 4,35 - 42,000 \times 4,9 = -9,000 \text{ mKg}$$

$$X_a = X_0 = +3,500 \text{ Kg}$$

$$Y_a = Y_0 = +42,000 \text{ Kg}$$

con lo cual los momentos en los puntos siguientes, se convierten en:

$$M_b = -9,000 - 3,500 \times 4,10 = -23,400 \text{ mkg}$$

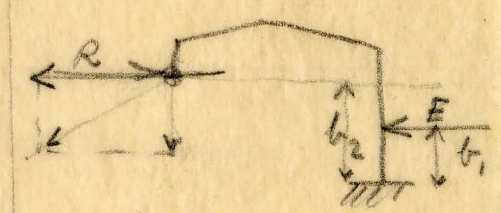
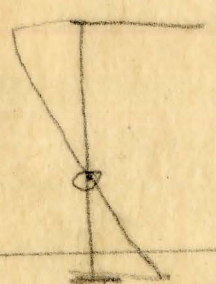
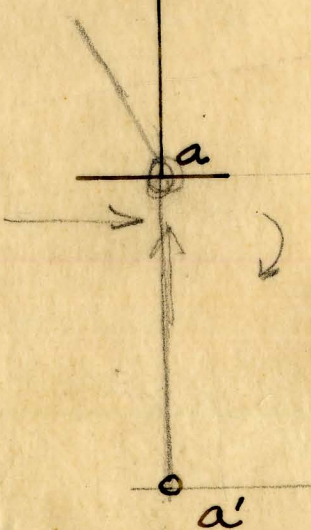
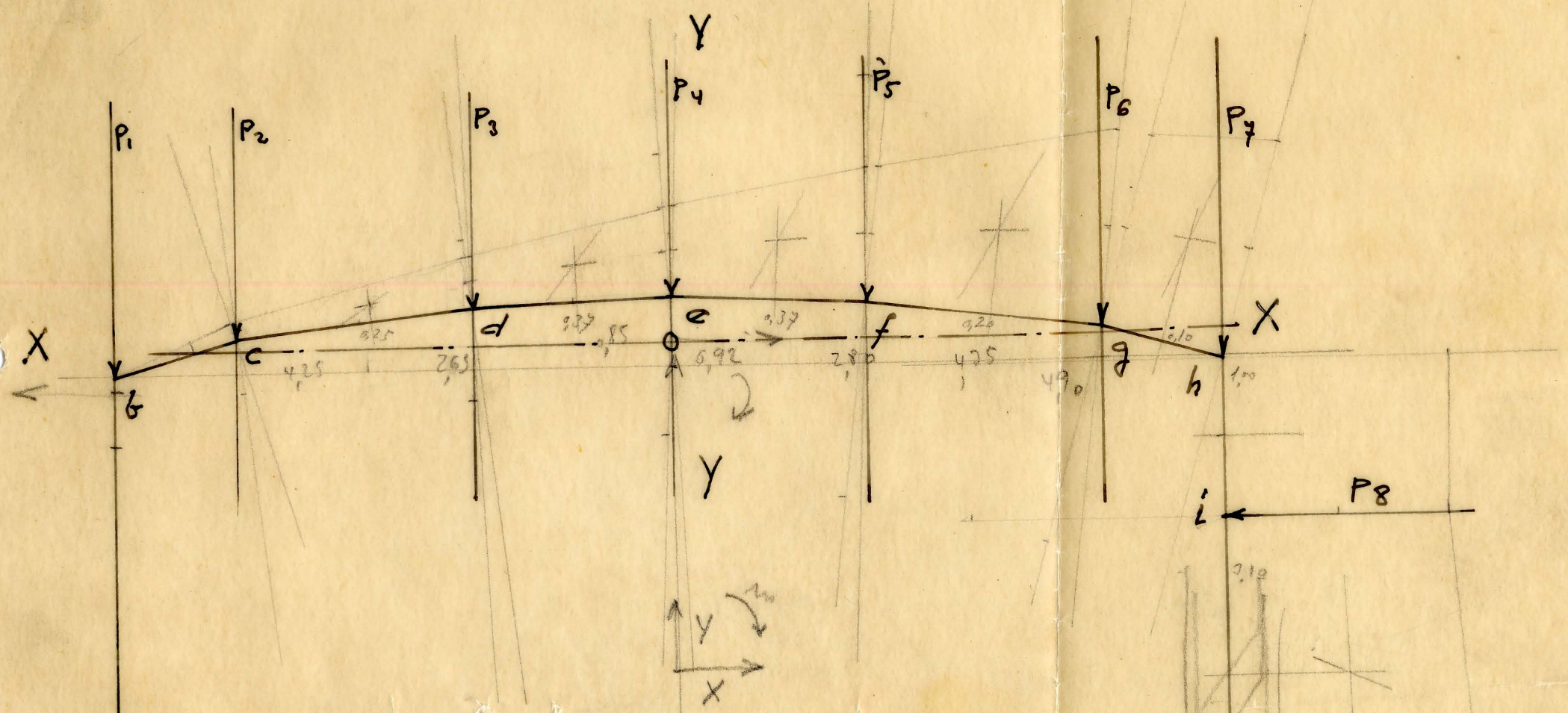
$$M_c = -9,000 - 3,500 \times 4,45 - 27,500 \times 4,9 - 4,100 \times 3,85 - 7,400 \times 1,75 + 4,200 \times 4,90 = +16,600 \text{ mkg}$$

$$M_h = -9,000 - 27,500 \times 9,8 - 4,100 \times 8,75 - 7,400 \times 6,65 - 6,000 \times 4,9 - 4,200 \times 3,15 - 2,900 \times 1,05 + 3,500 \times 4,1 + 4,200 \times 9,80 = -13,900 \text{ mkg}$$

$$M_f' = -410,600 + 410,000 = -600 \text{ mkg}$$

Los resultados de las tres hipótesis calculadas son los siguientes

Puntos	1ª hipótesis	2ª hipótesis	3ª hipótesis
a'	—	-120,000 mkg	—
a	+55,500 mkg	—	-9,000 mkg
b	-17,500 "	-36,000 mkg	-23,400 "
c	+15,600 "	+21,400 "	+16,600 "
h	-2,700 "	-18,000 "	-13,900 "
f	+21,800 "	-130,000 "	-6,000 "



$$E b_1 = R b_2$$

$$R = \frac{E b_1}{b_2}$$

