Frontón Recoletos

Calculo de los valores de J y K

277.723 6

Calculo de los valores de J, K, j, k.

La expresión de los valores sucesivos de J y K es:

$$J_n = J_1 J_{n-1} - K_1 K_{n-1}$$

$$K_n = J_1 K_{n-1} + K_1 J_{n-1}$$

y en igual forma para j y k.

De estos valores, es necesario calcular, los comprendidos entre 1 y 7 inclusive. (y para los lobulos I y II)

Se conocen los valores particulares siguientes:

$$J_1 = -\sqrt{\sqrt{\frac{J_2(-K_2)}{2}} + \frac{J_2}{2}}$$

$$j_1 = -\sqrt{\sqrt{\frac{j_2(+k_2)}{2}} + \frac{j_2}{2}}$$

$$K_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{J_2(-K_2)}{2}} - \frac{J_2}{2}}$$

$$k_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{j_2(+k_2)}{2}} - \frac{j_2}{2}}$$

Los parentesis de los radicales, representan en realidad otros valores U y u, pero que por la pequeñez de V respecto a 1 puede admitirse

$$U = -K_2 \quad y \quad u = k_2$$

Pero estos valores de $J_1, j_1, K_1, y\ k_1$ estan en función de J_2, j_2, K_2 y k_2 que aun son desconocidas. Para su resolución, empesamos por aceptar los valores aproximados siguientes:

$$K_2'^{I} = -\sqrt[4]{\nu'^{I\,2} \times \lambda'^{I\,2}} = -\sqrt[4]{0{,}513^2 \times 270{,}64^2} = -11{,}7829 \simeq -U'^{I}$$

$$K_2'^{II} = -\sqrt[4]{\nu'^{II\,2} \times \lambda'^{II\,2}} = -\sqrt[4]{0{,}134^2 \times 138{,}57^2} = -4{,}3093 \simeq -U'^{II}$$

$$K_2''^{I} = -\sqrt[4]{\nu''^{I\,2} \times \lambda''^{I\,2}} = -\sqrt[4]{4{,}617^2 \times 270{,}64^2} = -35{,}3490 \simeq -U''^{I}$$

$$K_2''^{II} = -\sqrt[4]{\nu''^{II\,2} \times \lambda''^{II\,2}} = -\sqrt[4]{1{,}21^2 \times 138{,}57^2} = -12{,}9480 \simeq -U''^{II}$$

$$k_2'^{I} = +\sqrt[4]{\nu'^{I\,2} \times \lambda'^{I\,2}} = \text{———} = +11{,}7829 \simeq +u'^{I}$$

$$k_2'^{II} = +\sqrt[4]{\nu'^{II\,2} \times \lambda'^{II\,2}} = \text{———} = +4{,}3093 \simeq +u'^{II}$$

$$k_2''^{I} = +\sqrt[4]{\nu''^{I\,2} \times \lambda''^{I\,2}} = \text{———} = +35{,}3490 \simeq +u''^{I}$$

$$k_2''^{II} = +\sqrt[4]{\nu''^{II\,2} \times \lambda''^{II\,2}} = \text{———} = +12{,}9480 \simeq +u''^{II}$$

$$J_2'^{I} = \frac{\nu'^{I}}{2} + U'^{I} = \frac{0{,}513}{2} + 11{,}7829 = +12{,}0394$$

$$J_2'^{II} = \frac{\nu'^{II}}{2} + U'^{II} = \frac{0{,}134}{2} + 4{,}3093 = +4{,}3763$$

$$J_2''^{I} = \frac{\nu''^{I}}{2} + U''^{I} = \frac{4{,}617}{2} + 35{,}3490 = +37{,}6575$$

$$J_2''^{II} = \frac{\nu''^{II}}{2} + U''^{II} = \frac{1{,}21}{2} + 12{,}9480 = +13{,}5530$$

$$j_2'^{I} = \frac{\nu'^{I}}{2} + u'^{I} = \frac{0{,}513}{2} - 11{,}7829 = -11{,}5264$$

$$j_2'^{II} = \frac{\nu'^{II}}{2} + u'^{II} = \frac{0{,}134}{2} - 4{,}3093 = -4{,}2423$$

$$j_2''^{I} = \frac{\nu''^{I}}{2} + u''^{I} = \frac{4{,}617}{2} - 35{,}349 = -33{,}0405$$

$$j_2''^{II} = \frac{\nu''^{II}}{2} + u''^{II} = \frac{1{,}21}{2} - 12{,}948 = -12{,}3430$$

Para la corrección de estos valores aproximados, ~~Calcula~~ calculamos (A_1, A_2, a_1 y a_2) ~~Δ_1 é Δ_2~~ (para los dos lóbulos y las dos ondas) en función de los ~~J~~ J y K obtenidos, por medio de las siguientes expresiones:

Nota: se ha llamado A y a, á Δ é Δ' por no poder utilizar el prima, que se confunde con 1ª onda.

$A_1'^{I}$	$= J_2^4 - 6J_2^2K_2^2 + K_2^4 + (2-2\nu)(J_2^3 - 3J_2K_2^2) + (1-4\nu+\nu^2)(J_2^2 - K_2^2) + (\nu^2 - 2\nu)J_2 + 4\nu^2\lambda^2 =$	$-6.543{,}697$	✓
$a_1'^{I}$	$= j_2^4 - 6j_2^2k_2^2 + k_2^4 + (2-2\nu)(j_2^3 - 3j_2k_2^2) + (1-4\nu+\nu^2)(j_2^2 - k_2^2) + (\nu^2 - 2\nu)j_2 + 4\nu^2\lambda^2 =$	*	
$A_1'^{II}$	$= \text{———} =$	$-320{,}740$	✓
$a_1'^{II}$	$= \text{———} =$	*	
$A_1''^{I}$	$= \text{———} =$	$-177.901{,}49$	✓
$a_1''^{I}$	$= \text{———} =$	$+178.185{,}92$	✓
$A_1''^{II}$	$= \text{———} =$	$-8.706{,}85$	✓
$a_1''^{II}$	$= \text{———} =$	$+8.725{,}29$	✓
$A_2'^{I}$	$= 4J_2^3 - 4J_2K_2^2 + (2-2\nu)(3J_2^2 - K_2^2) + (1-4\nu+\nu^2)2J_2 + (\nu^2 - 2\nu) =$	$+600{,}804$	✓
$a_2'^{I}$	$= 4j_2^3 - 4j_2k_2^2 + (2-2\nu)(3j_2^2 - k_2^2) + (1-4\nu+\nu^2)2j_2 + (\nu^2 - 2\nu) =$	*	
$A_2'^{II}$	$= \text{———} =$	$+81{,}507$	✓
$a_2'^{II}$	$= \text{———} =$	*	
$A_2''^{I}$	$= \text{———} =$	$+3.940{,}50$	✓
$a_2''^{I}$	$= \text{———} =$	$+5.976{,}33$	✓
$A_2''^{II}$	$= \text{———} =$	$+643{,}32$	✓
$a_2''^{II}$	$= \text{———} =$	$+691{,}51$	✓

Nota: Se ha prescindido de los exponentes de J, K, ν y λ en cada caso, para mayor claridad, pero no debe olvidarse que son iguales a los del A correspondiente.

* estos valores, no se encuentran en el borrador y no repetimos su cálculo, por no ser necesario, ya que disponemos de los resultados obtenidos de su aplicación.

Con estos valores de A, se resuelven los siguientes sistemas de dos ecuaciones con 2 incognitas, que dan los terminos de correccion (x é y) de los valores aproximados de J_2 y K_2.

$$X^{\prime I}\left[4J_2^3-12J_2K_2^2+3(2-2\nu)(J_2^2-K_2^2)+2(1-4\nu+\nu^2)J_2+(\nu^2-2\nu)\right]+Y^{\prime I}\left[-12J_2^2K_2+4K_2^3-6(2-2\nu)J_2K_2-2(1-4\nu+\nu^2)K_2\right]=-A_1^{\prime I}$$

$$X^{\prime I}\left[12J_2^2-4K_2^2+6(2-2\nu)J_2+2(1-4\nu+\nu^2)\right]+Y^{\prime I}\left[-8J_2K_2-2(2-2\nu)K_2\right]=-A_2^{\prime I}$$

de este sistema, con los valores de $J_2^{\prime I}$, $K_2^{\prime I}$ y $\nu^{\prime I}$ se obtienen:

$X^{\prime I} = -0,4889$ $\qquad$ $Y^{\prime I} = -0,010098$ *

y en igual forma, sin mas que ir variando los valores de J_2, K_2 y ν, se obtienen:

$X^{\prime II} = -0,4421$ $\qquad$ $Y^{\prime II} = -0,046995$ *

$X^{\prime\prime I} = -0,4387$ $\qquad$ $Y^{\prime\prime I} = +0,061$

$X^{\prime\prime II} = -0,4624$ $\qquad$ $Y^{\prime\prime II} = +0,0343$

$x^{\prime I} = -0,529$ $\qquad$ $y^{\prime I} = +0,0309$ *

$x^{\prime II} = -0,564$ $\qquad$ $y^{\prime II} = +0,0848$ *

$x^{\prime\prime I} = -0,562$ $\qquad$ $y^{\prime\prime I} = -0,0621$

$x^{\prime\prime II} = -0,5386$ $\qquad$ $y^{\prime\prime II} = -0,0417$

Los valores marcados con *, se ha comprobado que tienen, por error signos contrarios, sin embargo, no se ha hecho la correccion en los valores siguientes, ya que el error es de poca importancia por el tamaño de la cifra..

Con esto, podemos obtener los valores corregidos de J_2 y K_2, que serán:

$J_2'^{I} = +12,0394 - 0,4889 = +11,5505$

$J_2'^{II} = +4,3763 - 0,4421 = +3,9342$

$J_2''^{I} = +37,6575 - 0,4387 = +37,2190$

$J_2''^{II} = +13,5530 - 0,4624 = +13,0910$

$j_2'^{I} = -11,5264 - 0,5290 = -12,0534$

$j_2'^{II} = -4,2423 - 0,5640 = -4,8063$

$j_2''^{I} = -33,0405 - 0,5620 = -33,6020$

$j_2''^{II} = -12,3430 - 0,5386 = -12,8820$

$K_2'^{I} = -11,7829 - 0,0101 = -11,7728 \simeq -U'^{I}$

$K_2'^{II} = -4,3093 - 0,0470 = -4,2623 \simeq -U'^{II}$

$K_2''^{I} = -35,3490 + 0,0610 = -35,2880 \simeq -U''^{I}$

$K_2''^{II} = -12,9480 + 0,0343 = -12,9140 \simeq -U''^{II}$

$k_2'^{I} = +11,7829 + 0,0309 = +11,7520 \simeq +u'^{I}$

$k_2'^{II} = +4,3093 + 0,0848 = -4,2245 \simeq +u'^{II}$

$k_2''^{I} = +35,3490 - 0,0621 = -35,4110 \simeq +u''^{I}$

$k_2''^{II} = +12,9480 - 0,0417 = -12,9900 \simeq +u''^{II}$

Conocidos estos valores definitivos de J_2 y K_2 podemos calcular los de J_1 y K_1 según se indicó anteriormente, en la siguiente forma:

$$J_1'^{I} = -\sqrt{\sqrt{\frac{J_2'^{I}(-K_2'^{I})}{2}} + \frac{J_2'^{I}}{2}} = -3{,}744$$

$$J_1'^{II} = \text{————————} = -2{,}204$$

$$J_1''^{I} = \text{————————} = -6{,}650$$

$$J_1''^{II} = \text{————————} = -3{,}967$$

$$j_1'^{I} = -\sqrt{\sqrt{\frac{j_2'^{I}\,k_2'^{I}}{2}} + \frac{j_2'^{I}}{2}} = -1{,}546$$

$$j_1'^{II} = \text{————————} = -0{,}883$$

$$j_1''^{I} = \text{————————} = -2{,}755$$

$$j_1''^{II} = \text{————————} = -1{,}645$$

$$K_1'^{I} = +\sqrt{\sqrt{\frac{J_2'^{I}(-K_2'^{I})}{2}} - \frac{J_2'^{I}}{2}} = +1{,}571$$

$$K_1'^{II} = \text{————————} = +0{,}963$$

$$K_1''^{I} = \text{————————} = +2{,}649$$

$$K_1''^{II} = \text{————————} = +1{,}627$$

$$k_1'^{I} = +\sqrt{\sqrt{\frac{j_2'^{I}\,k_2'^{I}}{2}} - \frac{j_2'^{I}}{2}} = +3{,}801$$

$$k_1'^{II} = \text{————————} = +2{,}364$$

$$k_1''^{I} = \text{————————} = +6{,}418$$

$$k_1''^{II} = \text{————————} = +3{,}948$$

Con esto, y recordando que los valores sucesivos de J y K tienen la forma:

$$J_n = J_1 J_{n-1} - K_1 K_{n-1}$$

$$K_n = J_1 K_{n-1} + K_1 J_{n-1}$$

Calculamos 7 valores sucesivos de J y K, cuyos resultados anotamos en el siguiente cuadro:

	Subindices						
	1	2	3	4	5	6	7
J'^{I}	−3,744	+11,55	−24,75	−5,07	+445,99	−3,256,03	+17,028,74
J'^{II}	−2,204	+3,930	−4,560	−2,637	+38,00	−152,201	+451,180
J''^{I}	−6,650	+37,219	−154,028	+141,486	+6.010,587	−87.190,505	+851.653,037
J''^{II}	−3,967	+13,091	−30,921	+4,659	+531,494	−4,302,526	+24.365,140
j'^{I}	−1,546	−12,05	+63,291	+7,190	−1,087,905	+3,242,74	+8,291,28
j'^{II}	−0,883	−4,81	+14,223	+5,514	−100,81	+142,02	+387,99
j''^{I}	−2,755	−33,602	+319,841	−123,196	−14.923,273	+88.236,82	+241.783,52
j''^{II}	−1,645	−12,882	+72,476	−2,800	−1,316,569	+4,382,728	+9.664,464
K'^{I}	+1,571	−11,77	+62,212	−271,81	+1.009,70	−3.079,67	+6.415,06
K'^{II}	+0,963	−4,260	+13,174	−33,426	+71,131	−120,176	+118,30
K''^{I}	+2,649	−35,288	+333,258	−2,624,186	+17.825,633	−102.618,414	+451.444,805
K''^{II}	+1,627	−12,914	+72,529	−338,031	+1.348,549	−4.484,953	+10,791,599
k'^{I}	+3,801	−11,75	−27,624	+283,291	−410,639	−3,500,28	+17.737,08
k'^{II}	+2,364	−4,22	−7,645	+40,374	−22,61	−217,17	+527,50
k''^{I}	+6,418	−35,411	−118,100	+2,378,105	−7,342,351	−75,549,389	+774,442,516
k''^{II}	+3,948	−12,990	−29,489	+334,644	−561,543	−4,274,076	+24.333,865