

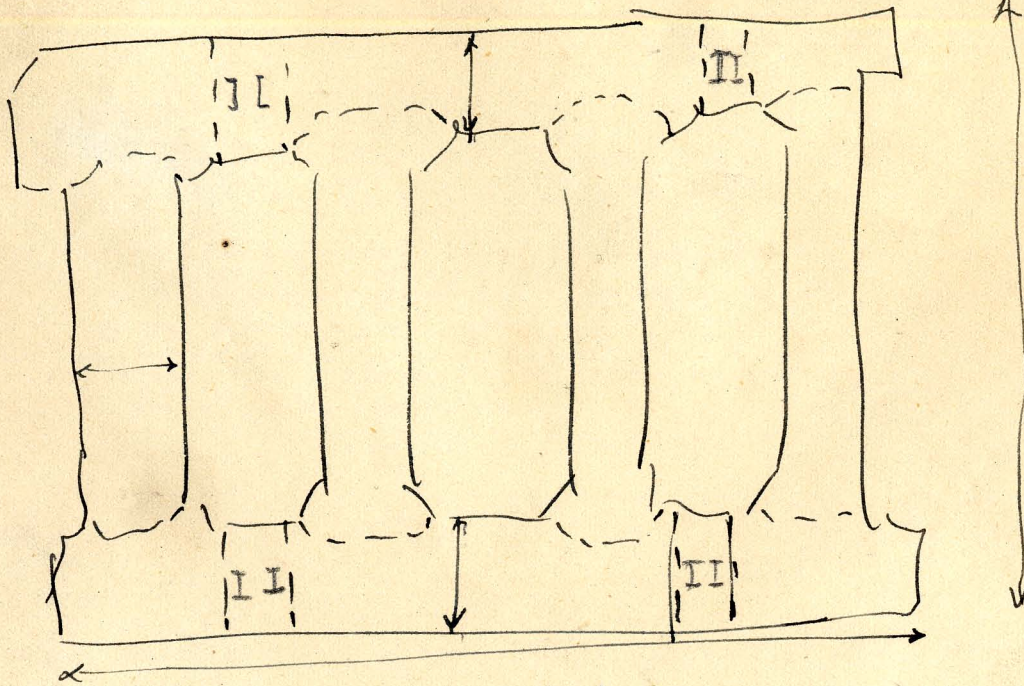
9-2830

Determinación de los esfuerzos
de torsión en el arco del Eila.

Lic. 940

Nº 363.546
FECHA - 27-11-41

12.5



2,40
 12,50
 1,30
 12,50
 1,10
 12,50
 1,00
 12,50
 0,90
 12,50
 0,80
 12,50
 0,80
 12,50
 9,90
 100,60

400
 75,00
 21,90
 7,10
 108,00

Fig 1 Seccion transversal tipo

12.5
750

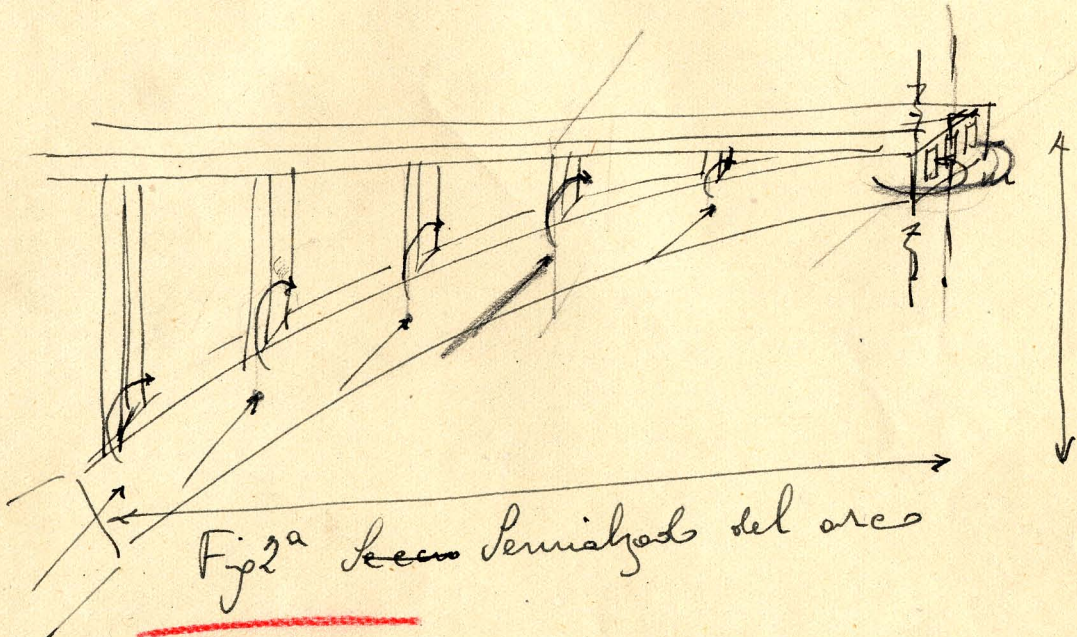


Fig 2^a Seccion perspectivada del arco



Determinación
de los esfuerzos de torsión en el
arco del Sola

alic. 45

dadas las grandes dimensiones del arco
 del Eila, y, particularmente, su gran flecha, se
 consideró prudente hacer un estudio detallado
 de los esfuerzos de torsion y de flexion transver-
 sal que puede producir el empuje del viento
 actuando sobre todo el frente del arco y de
 la fachada de talleres; y puede ser interesante,
 para algun otro caso análogo, exponer el método
 seguido y los resultados obtenidos, especialmente
 en lo que se refiere al reparto de las tensiones
 cortantes por torsion en una seccion fabricada
 multicelular.

Fig 1 Seccion tipo.

Conocidos los empujes horizontales sobre el arco producidos por el viento sobre el arco, los montantes y el tablero y, en consecuencia, los empujes totales perpendiculares al plano de la directriz del arco en cada una de las dovelas en que ~~puede~~ se considere dividido, y los momentos flectores alrededor de las tangentes a la directriz producidos por los montantes sobre el arco bajo la acción del viento que actúa en aquellos y en el tablero ~~por en-~~ ~~cina~~ del arco, puede considerarse el remiarcos trabajando como una ménsula curva empotrada en el arranque y que reporta, además de los empujes antedichos, una reacción hiperestática en clave que, en este caso por razón de la simetría, se reduce exclusivamente a una flexión alrededor de la vertical de clave.

Fig 2

—————→
Puede, así, aplicarse fácilmente el teorema

de Cardighans teniendo en cuenta los efectos de flexión y de torsión, pues, no habiendo, por simetría, ~~carrini~~ recorrido angular de clave, se obtiene ^{directamente} la ecuación:

$$\int_a^c \frac{M_f}{EI} \frac{dM_f}{ds} ds + \int_a^c \frac{M_t}{GK_t} \frac{dM_t}{ds} ds = 0 \quad (1)$$

en la que la integral se extiende de arranque a clave, y en la cual son:

- M_f Momento de torsión en un punto cualquiera de la directriz
- M_t Momento de torsión idem. id.
- m Momento hiperestática en clave
- ds Elemento diferencial de directriz
- E, G Modulo de elasticidad longitudinal
- G Idem transversal.
- I Momento de inercia de las secciones respecto a un eje vertical
- ~~# I_p Momentos ^{de inercia} polares, ~~ficticios~~ o reducidos que luego ~~del ~~examinaremos~~~~~~
- K Coeficiente de reducción a aplicar a estos momentos polares, como luego se verá.

Siendo M_f' M_t' los momentos isostáticos en la ménsula del remiárcos, m el momento hiperestático en clave, γ y el ángulo de la tangente a la directriz con la horizontal, se tiene:

$$M_f = M_f' + m \cos \gamma$$

$$M_t = M_t' + m \sin \gamma$$

Basta, pues, substituir estos valores en la ecuación anterior para tener la ecuación en m , que puede resolverse haciendo ~~las~~ las integraciones analítica o gráficamente; pero, surge la dificultad en la determinación de los momentos ficticios KI_p que no son, como en una sección circular, los momentos polares, sino estos multiplicados por un coeficiente K menor que la unidad, que depende del especial reparto de tensiones en la sección como ^{habremos} ~~hemos~~ de ver.

Planteamiento teórico del problema de la torsión

Aun cuando sea repetir el planteamiento y desarrollo teórico de un problema conocido y tratado en todos los libros elementales de elasticidad, creemos preferible hacer rápida y sucintamente la exposición completa de la teoría, aplicable a una pieza prismática cualquiera de sección con dos ejes perpendiculares de simetría y de directriz recta o curvada a ella por lo grande de su radio de curvatura frente a las dimensiones de la sección.

Arrancaremos, pues, dándolas por conocidas, de las ecuaciones de equilibrio interno y de compatibilidad y de las de contorno que constituyen la base general de la teoría de la elasticidad,

Tomemos, como origen de coordenadas el centro de la sección, como ejes XX , YY , los dos ejes de simetría de la misma, y como eje ZZ la normal a ellos por el origen.

Sean $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ las tensiones, en un punto cual
 quiera, normales al elemento diferencial de superficie
 en que actúan y paralelas a la dirección que marca
 su subíndice; y sean $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ las tensiones
 tangenciales paralelas a la dirección que indica el
 primer subíndice y actuando sobre un plano
 normal a la dirección del segundo subíndice.

Las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio
 interno, teniendo en cuenta que en este caso de
 rotulación externa exclusivamente por torsión las
 fuerzas exteriores sobre el interior del paralelepi-
 pedo elemental son nulas, son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (2)}$$

Las seis ecuaciones de compatibilidad, puestas en la forma corriente en funcion de las tensiones, son:

$$\left. \begin{aligned}
 (1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 & \quad \text{"} \quad (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0 \\
 (1+\nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 & \quad \text{"} \quad (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} = 0 \\
 (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 & \quad \text{"} \quad (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

en las que:

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Por ultimo las ecuaciones de equilibrio en el contorno son:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= X_0 \\
 \sigma_y l + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l &= Y_0 \\
 \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= Z_0
 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

siendo l, m, n, los tres cosenos directores de la normal a la superficie, y X₀, Y₀, Z₀ las proyecciones sobre los ejes respectivos de las fuerzas o reacciones exteriores sobre la

superficie del contorno.

Es fácil comprobar, como vamos a ver, que ~~el~~ problema planteado en el caso de torsión que plantea unos ~~estos~~ sistemas de ecuaciones se resuelve con ~~la~~ ^{una} solución correspondiente a un estado de deformación tal que las secciones se mantengan (a) indeformables en planta o en proyección sobre su propio plano, (b) equidistantes entre sí, pero (c) girando (alrededor del centro de figura en este caso de simetría) unas con relación a otras, ángulos proporcionales a la separación entre las secciones respectivas, y sin perjuicio de que todas las secciones se ablen o deformen volviendo de su plano con igual deformación o ablen en todas ellas, mientras el momento de torsión sea constante, y con ángulos de giro γ ablen proporcionales, ^{naturalmente,} (a este momento si b hacemos variar.

llamando $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, las deformaciones longitudinales

duales del elemento diferencial según las direc-
 ciones x, y, z , respectivamente; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, las
 deformaciones transversales o de deslizamiento (en la
 dirección del primer subíndice, ~~sobre~~ de las caras normales
 a la del segundo); y u, v, w , las proyecciones de
 los recorridos de un punto ^{cualquiera} sobre los mismos ejes
 XX, YY, ZZ ; la expresión analítica del estado de
 deformación antedicho viene dada por las condiciones:

$$(a) \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

$$(b) \quad \varepsilon_z = 0$$

$$(c) \quad u = -\alpha yz \quad " \quad v = \alpha xz \quad \text{---} \quad (5)$$

siendo α el ángulo de giro relativo de dos secciones
 a distancia unidad (positivo levógira) correspondiente
 a un determinado momento de torsión M_t .

Las conocidas relaciones entre las deformaciones
 las tensiones y los recorridos:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{du}{dx} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{dv}{dy} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{dw}{dz} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}
 \end{aligned} \tag{6}$$

substituidas en las condiciones de deformación exterior, dan:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \tag{7}$$

Quedan, pues, solamente las tensiones τ_{xz} , τ_{yz} , que, con arreglo a las dos últimas ecuaciones (6) y a las (5) cumplen la condición:

$$\frac{d\gamma_{yz}}{dx} - \frac{d\gamma_{xz}}{dy} = \frac{1}{G} \left(\frac{d\tau_{yz}}{dx} - \frac{d\tau_{xz}}{dy} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dy} \right) = 2\alpha$$

como era obligado, ya que la deformación establecida es, en planta, un simple giro alrededor del origen y uniforme a lo largo de z .

Como, con el tipo de deformación establecida, τ_{xz} , τ_{yz} son constantes a lo largo de z o independientes de ella podemos hacer

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{"} \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{--- (8)}$$

viendo ϕ una función de x, y , solamente; y entonces la condición anterior toma la forma:

$$\frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 2\alpha$$

o sea:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = -2G\alpha = \text{Const.} \quad \text{--- (9)}$$

Es fácil, ~~comprobar~~ ^{ahora,} ~~ahora, que, introduciendo estos valores de las tensiones (7) y (8), siempre que ϕ cumpla la condición (9) se satisfacen, tanto las~~

ecuaciones de equilibrio interno (2), como las de compatibilidad (3), haciéndole todas idénticamente nulas.

Lo mismo sucede con las de contorno ^{(aplicadas a las superficies laterales de la pieza (l = ~~1~~ = 1, u = 0))} ^(X₀ = Y₀ = Z₀ = 0) excepto la última que toma la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (10)$$

siendo ds el elemento diferencial de contorno de la sección.

En las superficies ^(o secciones) extremas (l = m = 0 " u = 1) ^(Z₀ = 0) las ecuaciones de contorno (4) se satisfacen en la siguiente ~~forma~~ ^{porque la tercera base} ~~se forma~~ ^{(idénticamente nula y los otros dos,} integradas en todo el área de la sección, dan:
~~Las dos primeras dan:~~

$$\iint \tau_{xz} dx dy = \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = \int dx \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

$$\iint \tau_{yz} dx dy = - \int dy \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = 0$$

ya que, impuesta la condición (10), ϕ es constante en todo el largo de un contorno. Esto nos dice que, efectivamente, la resultante de las tensiones en los

recciones extremas es una, reduciéndose a un par de torsion, cuyo valor es:

$$\begin{aligned} \iint \tau_{yz} x \, dx \, dy - \iint \tau_{xz} y \, dx \, dy &= - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x \, dx \, dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y \, dx \, dy = \\ &= - \int \phi x \, dy + \iint \phi \, dx \, dy - \int \phi y \, dx + \iint \phi \, dy \, dx \\ &= - \int \phi x \, dy - \int \phi y \, dx + 2 \iint \phi \, dx \, dy = Mt \dots (11) \end{aligned}$$

expresion que nos da el momento de torsion correspondiente al giro α dado por la expresion (9).

Por consiguiente, la solucion:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} ,$$

siendo ϕ una funcion de x, y que cumpla las condiciones:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\alpha$$

en toda la superficie de la reccion, y la condicion

$$\frac{d\phi}{ds} = 0$$

en cualquier contorno de la misma, satisface el

problema y corresponde a la rotacion real dentro de la teoria de la elasticidad.

Rememto en el problema conviene observar que, ~~integ~~ aun cuando el valor de ϕ en el contorno de una region llena sea arbitrario porque el añadir una constante a esta funcion no altera los valores de τ_{xz} , τ_{yz} , sin embargo, en el caso de regiones con huecos o contornos interiores, una vez fijado el valor de ϕ en uno de los contornos, sus valores en los otros no son arbitrarios.

En efecto, integrando dentro del area A_c , comprendida por un contorno cerrado c cualquiera,

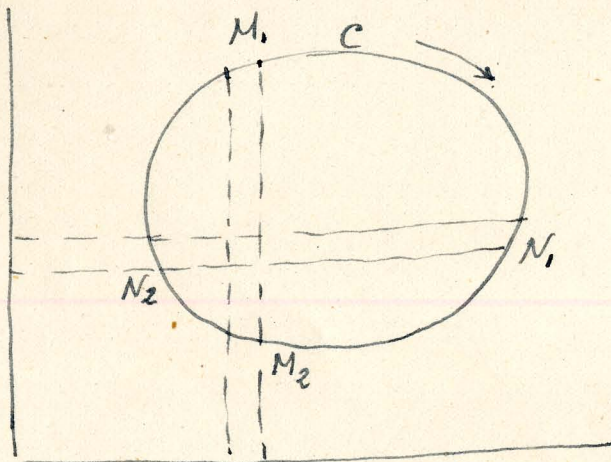
la ecuacion (9) se tiene:

$$2G \alpha A_c = - \iint_{A_c} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy = - \iint \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dx dy =$$

$$= - \int dx \int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dy + \int dy \int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} dx = - \int \left[\tau_{xz} \right]_{M_1}^{M_2} dx + \int \left[\tau_{yz} \right]_{N_1}^{N_2} dy$$

Ahora bien; al transformar estos integrales en integrales a lo largo de la línea C , ha de tenerse en cuenta que las diferenciales dx y dy que en ellas entran provienen de la integral del área ~~A~~

~~A~~



entran provienen de la integral del área

$$A_c = \iint dx dy$$

y son, por tanto, positivos; en cambio, en la integral a lo largo de C , la dx es positiva en M_1 y negativa en M_2 mientras que la de dy es negativa en N_1 y positiva en N_2 . Resulta, pues,

$$\int_{M_1}^{\int} [\tau_{px} - \tau_{px}] dx = \int_C \tau_{px} dx$$

$$\int_{N_1} [\tau_{yz} - \tau_{yz}] dy = - \int_c \tau_{yz} dy$$

\mathcal{L} , por tanto,

$$- \int_{M_1} [\tau_{pz} - \tau_{pz}] dp + \int_{N_1} [\tau_{yz} - \tau_{yz}] dy = - \int_c \tau_{pz} dp - \int_c \tau_{yz} dy =$$

$$= - \int_c (\tau_{pz} dp + \tau_{yz} dy) = - \int_c \left(\tau_{pz} \frac{dp}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \right) ds = - \int_c \tau ds \quad (12)$$

o sea $2\mathcal{L} \times A_c = - \int_c \tau ds$ siendo τ la densidad constante en la dirección ~~de~~ s de la tangente al contorno que actúa (que con la notación adoptada sería τ_{sz}).

Esta demostración se aplica igualmente a un recinto múltiplemente conexo, con la salvedad de que la integral relativa al contorno exterior esté afectada del signo menos y las relativas a los contornos interiores del signo más, si las integrales se consideran en el mismo sentido positivo a lo largo de los contornos. Por consiguiente, siendo A el área llena maciza ~~o~~ de la sección o diferencia de la del contorno exterior y los interiores

re la tiene que:

$$2\gamma dA = - \int_{ext} \sigma ds + \int_{int} \sigma ds + \int_{int} \sigma ds + \dots \quad (13)$$

ecuación que es simple consecuencia de la (9)

de la que se ha deducido por interpretación; es decir que cumpliendo la condición (12) en (n-1) contornos y verificándose a su vez la (9) se verificara la 12 forzosamente en el otro contorno.

Xy.

Por último, recordemos también que en un punto y según una dirección (de normal n) cualquiera dentro de la sección, ~~existe~~ la tensión cortante se viene dada por la expresión:

$$\tau = \tau_{yz} \cos(ny) - \tau_{xz} \cos(nx) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (14)$$

siendo dn el elemento diferencial de la normal a la dirección considerada de τ .

Método teórico-experimental de resolver el problema.

Como la complejidad de la sección no puede pretenderse obtener analíticamente la expresión de $\phi(x, y)$, pero, puede obtenerse experimentalmente con solo darse cuenta de que la expresión: (15)

$$\phi = \phi' + \phi'' + \phi''' = m' [\psi' - a(x^2 + y^2)] + m'' [\psi'' - a(x^2 + y^2)] + m''' [\psi''' - a(x^2 + y^2)]$$

(en la que a, m', m'', m''' son constantes a determinar) satisface el problema siempre que los ψ cumplan la condición:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{---} \quad (16)$$

y tengan en los contornos los valores:

$$a(x^2 + y^2) + b_n$$

siendo b_n una constante ^{arbitraria} desconocida para cada contorno,

con b que se tendrá a b luego de cada uno de ellos

$$\phi = \text{Const.}$$

Pero, estas condiciones son las que cumple

una membrana, desprovista de peso, que arrancando de los contornos con las ordenadas:

$$a(x^2 + y^2) + b_n$$

no presente resistencia a esfuerzo constante ni a flexion, sino que unicamente sufra en un plano tangente tensiones constantes e iguales en todos los puntos y en todas las direcciones, como se verifica en una membrana liquida que se sostiene por su tension superficial y cuyo espesor es suficientemente pequeno para poder prescindir del su peso propio; tal es, por ejemplo, una pompa

de jabon, u otra solucion analoga de gran tension superficial. No creemos necesario entrar en la demostracion de que en este tipo de membranas, siendo ψ las ordenadas, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ es precisamente el cociente la condicion (16) se cumple ^{automa} _(Figura 1)

Vamos a ver, pues, como pueden determinarse las constantes m', m'', m''', a y obtener todos los datos necesarios sin mas que realizar unas membranas de este tipo.

En nuestro caso particular, tenemos, además del contorno exterior, tres contornos interiores y, por consiguiente, tres constantes b_n que representen los desniveles o alturas a que quedan estos contornos ~~exterior~~ interiores respecto ~~al~~ exterior, y entre los ^{cuales} ~~que~~ se extiende la membrana.

La simetría de la sección hace que los dos ^{de los huecos o células} contornos laterales tengan que estar a nivel con sus constantes iguales; Sean, pues, en una de las membranas b_p' este desnivel y b_c' el desnivel o altura del contorno central igualmente respecto al exterior, y sean b_p'' , b_c'' , b_p''' , b_c''' los valores respectivos en una segunda ^o una tercera membranas.

Las constantes m' , m'' , m''' pueden entonces determinarse por la condición (12) que vimos anteriormente, según la cual la función ϕ ha de ser:

en un contorno lateral:

$$\int_{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = m' \int \frac{\partial \phi_{\rho}'}{\partial n_{\rho}} ds_{\rho} + m'' \int \frac{\partial \phi_{\rho}''}{\partial n_{\rho}} ds_{\rho} + m''' \int \frac{\partial \phi_{\rho}'''}{\partial n_{\rho}} ds_{\rho} = + 2g\alpha A_{\rho}$$

en el contorno central

$$\int_{c} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = m' \int \frac{\partial \phi_c'}{\partial n_c} ds_c + m'' \int \frac{\partial \phi_c''}{\partial n_c} ds_c + m''' \int \frac{\partial \phi_c'''}{\partial n_c} ds_c = + 2g\alpha A_c$$

y en el contorno exterior

$$\int_{e} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = m' \int \frac{\partial \phi_e'}{\partial n_e} ds_e + m'' \int \frac{\partial \phi_e''}{\partial n_e} ds_e + m''' \int \frac{\partial \phi_e'''}{\partial n_e} ds_e = - 2g\alpha A_e$$

(17)

Disponemos tambien de la ecuacion (9) que da en este

caso:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 4a (m' + m'' + m''') = - 2g\alpha \quad (18)$$

~~Estas cuatro ecuaciones~~ En lugar de tomar como incognitas a m' , m'' , m''' , es más cómodo ~~tomar~~ fijar a para la ~~realización~~ realización de las membranas con valores arbitrarios de a y de b_u y tomar como incognita el ángulo de giro α que resulte ~~o los valores~~ ^{coeficientes} $\frac{m'}{g\alpha}$, $\frac{m''}{g\alpha}$, $\frac{m'''}{g\alpha}$

Parece, a primera vista, que el sistema (16, 17) de ~~cuatro ecuaciones con una homogénea con las~~ ~~cuatro incognitas~~ α, m', m'', m''' con las tres incognitas ~~de este es superfluo~~

Resulta entonces el sistema (17, 18) de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, pero esto no debe extrañar porque ya vimos que si sumamos los dos primeros y restamos la tercera tenemos la ecuación (13) que, como vimos, es consecuencia de la (18) y de dos cualquiera de los tres primeros. Esto nos permitirá aprovechar la superabundancia del sistema para comprobar la exactitud o aproximación de la solución numérica que se obtenga.

En resumen, habrá ^{extender} ~~constituir~~ tres miembros, sobre contornos correspondientes a ~~determinados~~ ^{valores arbitrarios de} ~~con abscisas o derivadas~~ ~~con~~ ~~valores arbitrarios de~~ a y b_u , ~~determinar en ellos los valores~~ ^{de las $\frac{\psi'}{g}, \frac{\psi''}{g}, \frac{\psi'''}{g}$} ~~mediante~~ ~~ellos~~ ~~directamente~~ ~~los~~ ~~valores~~ ~~de~~ ~~los~~ ~~contornos~~ ~~en~~ ~~suficiente~~ número de puntos para poder dibujar las superficies correspondientes y de ellas las $\frac{\phi}{g}, \frac{\phi''}{g}, \frac{\phi'''}{g}$ de la expresión (15); sobre ellas determinar ^(máximas) los valores de las pendientes en los contornos $(\frac{\partial \phi}{\partial u})$, para con esos datos resolver el sistema (17) tomando de comprobación la ecuación (18),

Oje

Oje

y una vez obtenidos los valores de $\frac{m'}{g\alpha}$ $\frac{m''}{g\alpha}$ $\frac{m'''}{g\alpha}$
~~obtener por la expresion (14) la figura de~~
~~multiplica~~ obtener de las tres superficies dibujadas ~~y~~
 mediante la aplicacion de la expresion (15), la figura
 de la superficie $\frac{\phi}{g\alpha}$; entonces la expresion (11) nos
 permitira' determinar directamente, por cubicion del
 volumen limitado por esa superficie y el plano del
 contorno exterior, el valor $\left(\frac{mt}{g\alpha}\right)$ ^{momento de torsion por g\alpha unidad} del $\frac{mtt}{\alpha}$; por ultimo, la
~~sucesion~~ maxima pendiente de esa superficie en
 un punto cualquiera nos dara segun (14) el valor
~~y~~ de la tension constante maxima ^(por g\alpha unidad) en ese punto,
 siendo su direccion tangente a la curva de nivel
 de la superficie en ^{el mismo} ~~ese~~ punto.

Aplicación al caso particular del Eila

El acuerdo con lo expuesto anteriormente se corroboró obteniendo las experimentalmente las membranas sobre contornos, previamente preparados, que en planta repujan los contornos reales de la sección a escala 1:20 y cuyas ordenadas correspondían a los ~~ecuaciones~~ valores:

$$a(x^2 + y^2) + b_n$$

tomando para ello las constantes arbitrarias siguientes:

$$a = \frac{1}{4} \quad " \quad b_p' = +1,00 \text{ cm} \quad " \quad b_c' = -1,00 \text{ cm}$$

$$a = \frac{1}{4} \quad " \quad b_p'' = +2,00 \quad " \quad b_c'' = +1,00$$

$$a = \frac{1}{4} \quad " \quad b_p''' = +1,63 \quad " \quad b_c''' = +2,23$$

Por medición directa sobre estas membranas se obtuvieron los datos de las superficies ψ' ψ'' ψ''' que se ven en las figs 3, 4 y 5.

la ordenada
 Retando en cada punto el ~~valor~~ correspondiente
 a la superficie conica: $a(x^2 + y^2)$ se obtuvieron las
 superficies $\frac{a(x^2 + y^2)}{z}$ ϕ' ϕ'' ϕ''' de las figs 6, 7 y 8
 Midiendo, mediante el trazado de perfiles transversales,
~~Representando sobre cada contorno~~ las pendientes
~~normales al~~ ~~il~~ a ~~los~~ normales a cada contorno a lo
 largo del mismo y representandolas como se indica
 en las figs 9, 10 y 11 ~~para~~ ~~determinar~~ ~~por~~ ~~representa-~~
 cion de los valores de las integrales

para cada contorno $\frac{1}{S \times A} \int \frac{\partial \phi'}{\partial n} ds$ " $\frac{1}{S \times A} \int \frac{\partial \phi''}{\partial n} ds$ " $\frac{1}{S \times A} \int \frac{\partial \phi'''}{\partial n} ds$.
 que se miden detallan en las mismas figuras.

Determinadas asimismo las areas A de cada contorno
 (A_2, A_c, A_e)
 se obtuvieron los datos completos para el planteamiento

de las ecuaciones (17) que numericamente son:

est
 est
 est

$$\left. \begin{aligned}
 +1,90 \frac{m''}{S \alpha} + 3,26 \frac{m'''}{S \alpha} + 3,21 \frac{m'''}{S \alpha} - 2 &= 0 \\
 +1,83 \frac{m''}{S \alpha} + 2,61 \frac{m'''}{S \alpha} - 5,82 \frac{m'''}{S \alpha} - 2 &= 0 \\
 +1,07 \frac{m''}{S \alpha} + 1,10 \frac{m'''}{S \alpha} + 0,61 \frac{m'''}{S \alpha} + 2 &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{--- (17')}$$

~~en~~ ~~como~~ la cuya solución ~~de~~ es:

$$\frac{m''}{g\alpha} = \frac{-6,57}{-2,13} \quad \frac{m'''}{g\alpha} = +4,745 \quad \frac{m^{IV}}{g\alpha} = -0,302$$

que ~~entre~~ valores que introducidos en la ecuación (18)

$$\text{dan: } 4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{-6,57}{-2,13} + 4,745 - 0,302 \right) = -\frac{2,13}{2,13} \approx -1 \approx -2,00 \quad (18')$$

Es decir, que ~~la~~ ~~con~~ esta ecuación tomada como de comprobación suma un error del 97%.

Considerando que este error era ~~perfectamente~~ aceptable y que ~~podría~~ ~~haber~~ ~~podría~~ ~~ser~~ debido a la medida ^{que se había hecho} menos exacta ^{de la primera membrana,} por falta de costumbre de manipulación, ^{de los operadores} volví a rehacer el problema tomando el sistema formado por las dos ~~primeras~~ últimas ecuaciones (17') y la (18') tomando como definitivos los resultados siguientes:

$$\frac{m'}{g\alpha} = \quad \frac{m''}{g\alpha} = \quad \frac{m'''}{g\alpha} =$$

Multiplíquese por cada uno de estos valores respectivamente los ordenados de las tres membranas $\phi' \phi'' \phi'''$

y sumando, se obtiene, por puntos, la superficie correspondiente a la función $\frac{\Phi}{G\alpha}$ de la fig 12; y se determina el volumen comprendido entre ella y el plano o plano del contorno exterior, se obtiene el valor

$$x \quad \frac{Mt}{G\alpha} = 287,5 \text{ (m}^4\text{)}$$

según la expresión (11).

Ahora bien, siendo el momento ~~de~~ de inercia polar de la sección:

$$x \quad I_p = 287,5 \text{ m}^4$$

podemos establecer:

$$x \quad Mt = G\alpha \frac{I_0}{I_p} I_p = 0,365 I_p G\alpha$$

x en la que 0,365 es el coeficiente K que hay que aplicar, en este tipo de sección al momento de inercia polar para entrar en la ecuación (1).

Las máximas tensiones cortantes se producen según las tangentes a las curvas de nivel de la

superficie ϕ , siendo unas en dirección normal a ellas ya que sus valores corresponden, como vimos (14) a la pendiente de la superficie en dirección normal a la de la tensión considerada. ~~La dirección y magnitud se indica en las figs.~~

En la fig 13 se indican en dirección y magnitud los valores que así resultan para un momento de torsión tal que $Mt/Ga = 1$ en la sección considerada.

Admitido que el coeficiente K ~~no~~ se man-
~~tiene~~ tiene sensiblemente constante para todas las
 secciones del arco, dada la gran semejanza de estas
 y sus variaciones de dimensiones relativamente peque-
 ñas, se tienen los datos para plantear y resolver
 la ecuación (1) que da el valor del momento un
 hiperstático en clave, ~~y con ella~~ Con ello se

obtuvieron los momentos de flexión y de torsión en distintas secciones del arco, en la forma conveniente, por lo que no entramos en detalle.

Aquí se obtuvieron en la sección más cargada con $KI_p = 140,5 \text{ m}^4$ y $Mt = 680 \text{ mtr}$ una tensión constante máxima de 46 kg/cm^2 .

Estas tensiones constantes, combinadas con las compresiones longitudinales que reporta el arco por compresión compuesta, dieron las direcciones e intensidades de las tracciones máximas que interesa tener, particularmente para estudiar las arveduras en las juntas de hominización.

Es posible que un estudio más detallado de las membranas hubiera permitido aunar sin algún pequeño aumento local de tensión en las proximidades inmediatas ^{de los puntos} ~~el entorno~~ de los puntos ^{de apoyo} ~~de apoyo~~ de la sección, pero, no se consideró necesario afinar más el estudio.

Toda la parte experimental fue efectuada desarrollada por el Laboratorio ^{de TCON} ~~Ton~~ de Investigaciones de la Construcción S.A. (con membranas de una solución jabonosa de composición especial que, mantenidas a temperatura 18° , permitían hacer las observaciones sin necesidad de renovar con excesiva frecuencia las membranas.

Para mayor seguridad y repetición las lecturas con el bordador de contornos en la posición normal y en la invertida con objeto de tomar las medias de ambas lecturas y evitar así los errores debidos al peso propio de la membrana que, en este caso, resultaban muy pequeños.

El modelo a escala $1/20$, así como el dispositivo general de lectura mediante puntos

grapo con punta especial a nivel variable, que se ve en la fig 14 permitía el trazado de varias curvas de nivel sin renovar ~~la~~ la membrana.

A pesar de ello, se requirieron experimentadores hábiles y pacientes para desarrollar con éxito el trabajo, particularmente por la dificultad de precisar los puntos de contacto del arañal con la membrana; y, probablemente, si hubieran de realizarse estudios mas extensos o mas frecuentes de este tipo, seria interesante estudiar la substitucion de este sistema de determinación de las curvas de nivel por puntos, por otros dispositivos de mayor eficacia, quizá de tipo óptico.

Pero, ha permitido comprobar nuevamente, no solamente la posibilidad práctica de aplicar el procedimiento como ya lo habían hecho

otros experimentadores, sino la ~~gran~~ ventaja
 y ~~exactitud~~ ^{aproximación} que con él ^{puede obtenerse} ~~se obtiene~~ para el
 estudio del reperto de lecciones en casos, como
 este, de ^{lecciones complicadas.} ~~gran complicación.~~

- Fig 1 - Sección transversal tipo
- Fig 2 - Alzate del ~~sección~~ ~~con~~ ~~función~~
- Fig 3 - Membranas ψ' para +1 -1
- | | | | | |
|----|--|----------------|-------|-------|
| 4 | — | ψ'' | +2 | +1. |
| 5 | — | ψ''' | +1,63 | +2,23 |
| 6 | | ϕ' | | |
| 7 | | ϕ'' | | |
| 8 | | ϕ''' | | |
| 9 | Contornos | , | | |
| 10 | " | " | | |
| 11 | " | " | | |
| 12 | La superficie ϕ/sa | con el volumen | | |
| 13 | Trabaja, independencia | $ut/sa = 1$ | | |
| 14 | Fotografía del desplazamiento | | | |