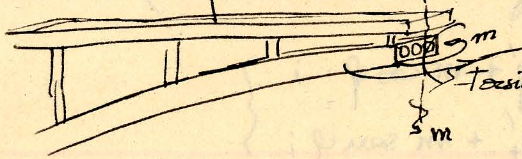
E. CORTANTES DE

TORSIÓN

Estudiar el viento en arco así:



Aplicando el Teorema de Castigliano:

$$\int_a^c \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial M} ds + \int_a^c \frac{M_t}{G.K.I_p} \frac{\partial M_t}{\partial M} ds = 0$$

a : arranque c = clave

M_f = momento flector en un pto cualquiera de la directriz

M_t = id de torsion en un pto cualquiera id.

M = momento en clave (hiperestatico)

ds = Elemento diferencial de la directriz

E = mod. d. longitudinal.

G = id transversal.

I = mom. de in. de las secciones respecto a su eje vertical.

I_p = moms. de in. polares.

K = coef. de reducción a aplicar a estos momentos polares, como luego se verá.

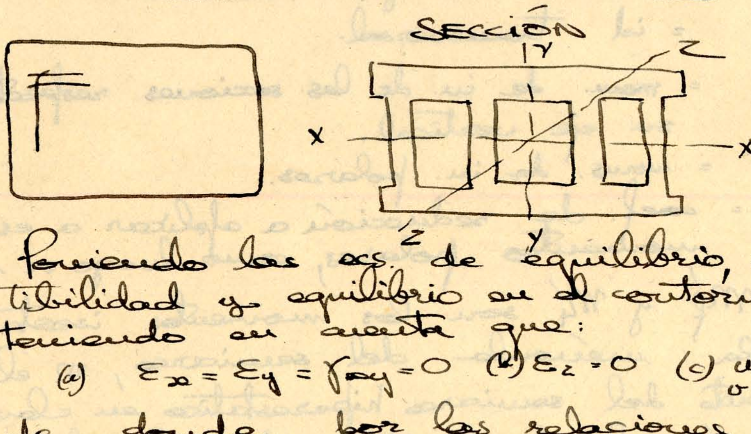
Si M_f' y M_t' son los momentos isostaticos en la ménsula del semiarco, M el momento del semiarco hiperestatico en clave y φ el ángulo de la tangente a la directriz.

con la ~~diagonal~~ horizontal, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} M_f &= M_f' + m\cos\varphi\ ; \\ M_t &= M_t' + m\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ; \end{aligned}\right\}$$

Con esto podríamos escribir la ecuación de Castigliano y hallar <u>m</u> pero surge la dificultad en la determinación de los momentos ~~hiperestáticos~~ ficticios kI_p, que no son, como en una sección ~~polar~~ circular, los momentos polares, sino estos multiplicados por un coef. k, menor que la unidad que depende del reparto de tensiones en la sección.

<u>Estudio elástico de la torsión</u>



Poniendo las ecs. de equilibrio, compatibilidad y equilibrio en el contorno, y teniendo en cuenta que:

(a) $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ (b) $\varepsilon_z = 0$ (c) $u = -\alpha y z$, $v = \alpha x z$

de donde por las relaciones entre

tensiones y deformaciones:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

y quedan solamente como tensiones

$$\tau_{xz} \; ; \; \tau_{yz} \; ;$$

que con arreglo a las últimas ecuaciones cumplen la condición:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\alpha$$

como era obligado, ya que la deformación establecida es, en planta, un simple giro alrededor del origen y uniforme a lo largo de z.

Como, τ_{xz}, τ_{yz} son constantes a lo largo de z o independientes de ella, podemos establecer:

$$-\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \;\; ; \;\; \tau_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

siendo ϕ una f. de x, y solamente y entonces la condición anterior toma la forma:

$$\frac{1}{G}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = -\frac{1}{G}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 2\alpha$$

o sea:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = -2G\alpha = C^{te} \qquad (9)$$

Con esto se satisfacen tanto las ecuaciones de equilibrio interno como las de compatibilidad.

Lo mismo sucede con las de contorno aplicadas a las superficies laterales de la pieza, excepto la última, que toma la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad ..$$

siendo ds la diferencial en el contorno de la sección.

En las superficies externas $(l = m = 0, n = 1, \tau_0 = 0)$ y las ecuaciones de contorno (4) se satisfacen porque la 3ª se hace id. nula y las otras dos se reducen a:

$$\iint \tau_{xz}\, dx\, dy = \int dx \int \frac{d\phi}{dy}\, dy = 0$$

$$\iint \tau_{yz}\, dx\, dy = -\int dy \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx = 0$$

ya que ϕ es constante a todo lo largo del contorno. Luego la R. gral es nula, como debía de ser. El momento será:

$$\iint \tau_{yz}\, y\, dx\, dy - \iint \tau_{xz}\, x\, dx\, dy =$$

$$= -\left(+\iint \frac{\partial \phi}{\partial x}\, x\, dx\, dy + \iint \frac{\partial \phi}{\partial y}\, y\, dx\, dy\right) =$$

(11) $$= -\int \phi x\, dy - \int \phi y\, dx + 2\iint \phi\, dx\, dy = \underline{2\iint \phi\, dx\, dy = M_t}$$

Por consiguiente la solucion:

$$
(9)\quad \left.\begin{array}{l}
\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\
\tau_{xz} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \, " \\
\tau_{yz} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\
\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\alpha \\
\dfrac{d\phi}{ds} = 0
\end{array}\right\}
$$

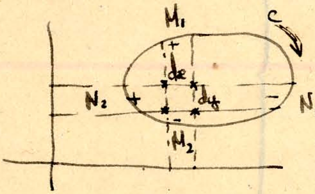
Debe notarse que aunque el valor de ϕ sea arbitrario en una sección llena, para el contorno, en una multicelular no lo es ya que aunque a uno de los contornos se le puede fijar el valor de ϕ arbitrariamente, el de los contornos restantes ya no lo es.

En efecto, integrando dentro del area A_c comprendida por un contorno cerrado, C, cualquiera, la ecuacion se convierte en:

$$
2G.\alpha.A_c = -\iint_{A_c} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) dx\,dy = -\iint\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}\right) dx\,dy = -\int dx \int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dy + \int dy \int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} dx =
$$

$$
= -\left[\int \left[\tau_{xz} - \tau_{xz}\right]_{M_1 - M_2} dx + \int \left[\tau_{yz} - \tau_{yz}\right]_{N_1 - N_2} dy\right]
$$

Si la hacemos a lo largo de un contorno C:



dx y dy son siempre positivas

τ_{xz} (M1 y M2) es unas veces positivo y otras negativo.

τ_{yz} (N1 y N2) es unas veces >0 y otras <0.

Luego:

$$-\int(\tau_{xz} - \tau_{xz})dx + \int[\tau_{yz} - \tau_{yz}]dy = -\int_c \tau_{xz}dx - \int_c \tau_{yz}dy =$$

$$= -\int_c(\tau_{xz}dx + \tau_{yz}dy) = -\int_c\left(\tau_{xz}\frac{dx}{ds} + \tau_{yz}\frac{dy}{ds}\right)ds =$$

$$= -\int_c \tau\, dx$$ o sea:

$$2G\alpha A_c = -\int_c \tau\, ds \qquad [12]$$

Si el recinto fuese ~~simple~~ multiplemente conexo la integral correspondiente al contorno exterior tiene signo − y las correspondientes a los interiores signo +.

Por consiguiente, si A es el area maciza se tiene:

$$2G.\alpha.A = -\int_{ext}\tau ds + \int_{int}\tau ds + \int_{int}\tau ds + \dots$$

ecuacion que no es mas que la consecuencia inmediata de la (9)

Condicion que se ha de cumplir en (n-1) contornos para que se cumpla en el n-simo.

Por último, señalemos también que en un punto, y según una dirección (de normal $\underline{n}$) cualesquiera dentro de la sección la tension cortante viene dada por la expresión:

$$\tau = \tau_{yz}\cos(nx) - \tau_{xz}\cos(ny) =$$

$$= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn}\right) = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

siendo $\underline{dn}$ el elemento diferencial de la normal a la dirección considerada τ.

METODO TEORICO-EXPERIMENTAL:

(15) $$\phi = \phi' + \phi'' + \phi''' = m'\left[\psi' - a(x^2+y^2)\right] + m''\left[\psi'' - a(x^2+y^2)\right] + m'''\left[\psi''' - a(x^2+y^2)\right]$$ satisface el problema siendo a, m', m'', m''' constantes a determinar y cumpliendo las ψ la condicion:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

siempre que tengan en los contornos los valores:

$$a(x^2+y^2)+b_n A$$

siendo b_n una constante arbitraria para cada contorno, con lo que se tendrá a lo largo de cada uno de ellos Φ = constante.

Que es la sup. delimitada por una membrana sin peso propio que tenga estas ordenadas.

Veamos como determinariamos m', m'', m''', a, etc se obtendrían los datos necesarios

En este caso tenemos además del contorno exterior 3 contornos interiores. y por tanto tres constantes b_n una para cada contorno. Por la simetría de la figura, dos de estas b_n son iguales.

Si llamamos b'_e al desnivel de una de estas membranas y b'_c a la de la central (sobre el exterior)

Si construimos 3 membranas distintas y tenemos además los valores

b''_c, b''_e , b'''_c, b'''_e en estas dos últimas, podemos determinar m' m'' m''' por medio de la ec. [12] por la cual ϕ nos dará:

en un contorno lateral:

$$\int_e \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = m' \int \frac{\partial\phi'_e}{\partial n_e} ds_e + m'' \int \frac{\partial\phi''_e}{\partial n_e} ds_e + m''' \int \frac{\partial\phi'''_e}{\partial n_e} ds_e = +2G\alpha A_e$$

en el central:

$$\int_c \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = m' \int \frac{\partial\phi'_c}{\partial n_c} ds_c + m'' \int \frac{\partial\phi''_c}{\partial n_c} ds_c + m''' \int \frac{\partial\phi'''_c}{\partial n_c} ds_c = +2G\alpha A_c \qquad (17)$$

y en el exterior:

$$\int_e \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = m' \int \frac{\partial\phi'_e}{\partial n_e} ds_e + m'' \int \frac{\partial\phi''_e}{\partial n_e} ds_e + m''' \int \frac{\partial\phi''_e}{\partial n_e} ds_e = -2G\alpha A_e$$

Tambien disponemos de la ecuación (9) que da en este caso:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 4a\,(m' + m'' + m''') = -2G\alpha \qquad (18)$$

En lugar de tomar como incognitas a, m', m'', m''', se da un valor a $\underline{a}$ y a $\underline{b_n}$ y se toma como incognitas α y $\frac{m'}{G\alpha}$, $\frac{m''}{G\alpha}$, $\frac{m'''}{G\alpha}$.

En este sistema, como una de las ecuaciones es consecuencia de las otras, podemos emplear una de ellas para comprobar.

Luego bastará con construir tres membranas sobre contornos correspondientes a valores arbitrarios de a y b_x, medir en ellas los valores de ψ' ψ'' ψ''' en suficiente número de puntos para poder dibujar las superficies correspondientes y de ellas obtener las ϕ', ϕ'', ϕ'''.

Con estas ϕ', ϕ'', ϕ''', determinar los valores de las máximas pendientes en los contornos $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, con esos datos resolver el sistema [17] y comprobar con la ecuación [18].

Una vez determinados los valores de

$\frac{m'}{G\alpha}$ $\frac{m''}{G\alpha}$ $\frac{m'''}{G\alpha}$ se obtiene empleando la (15) la superficie $\phi/G\alpha$ y entonces la 11 nos permitirá determinar directamente, por cubicación del volumen limitado por esa superficie y el plano del contorno exterior, el valor

$\frac{M_t}{G\alpha}$ del momento de torsión para $G\alpha$ unidad; y esta superficie nos dará la máxima T. cortante por su pendiente para $G\alpha = 1$ siendo su dirección la tangente a la curva de nivel en el punto.