ACUEDUCTO DE TABLELLINA A CANAL GUADALCACIN

CALCULO LAMINAR DE LA CUBA

FECHA Septiembre 1956

N.º 827·303

CALCULO LAMINAR DE LA CUBA.

DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS EN LA CUBA

Se estudiará un solo vano ya que al estar formado el acueducto por un número muy grande de vanos y tener que sujetar los apoyos de los vanos extremos para canalizar convenientemente el esfuerzo de compresión dado por el arco, se puede suponer prácticamente que todos los vanos se comportarán como empotrados en sus dos extremos.

De acuerdo con lo anterior la determinación de los esfuerzos que actúan en la pared de la cuba exige el cálculo de una lámina cilindrica de directriz circular y espesor uniforme empotrada en sus dos extremos. El cálculo se desarrollará para los dos casos: acueducto lleno y acueducto vacío.

Características geométricas.

La sección transversal de la cuba, Fig. 0 está formada por una corona circular simétrica respecto al plano vertical, de 1,74 m. de radio exterior, 1,59 m de radio interior y un ángulo en el centro de 252º. El radio de cálculo o radio medio vale 1,665 m.

La luz de la lámina o distancia entre ejes de pilas es de 20 m., y el espesor de la pared de - 0,15 m.

Hipótesis de cálculo.

El cálculo se ha desarrollado con las hipótesis normales establecidas para las láminas cilíndricas de directriz circular, y las simplificaciones introducidas en la teoría general son las que recomienda la "American Society of Civil Engineers" en su publicación "Desing of cylindrical concrete shell roofs" del año 1952.

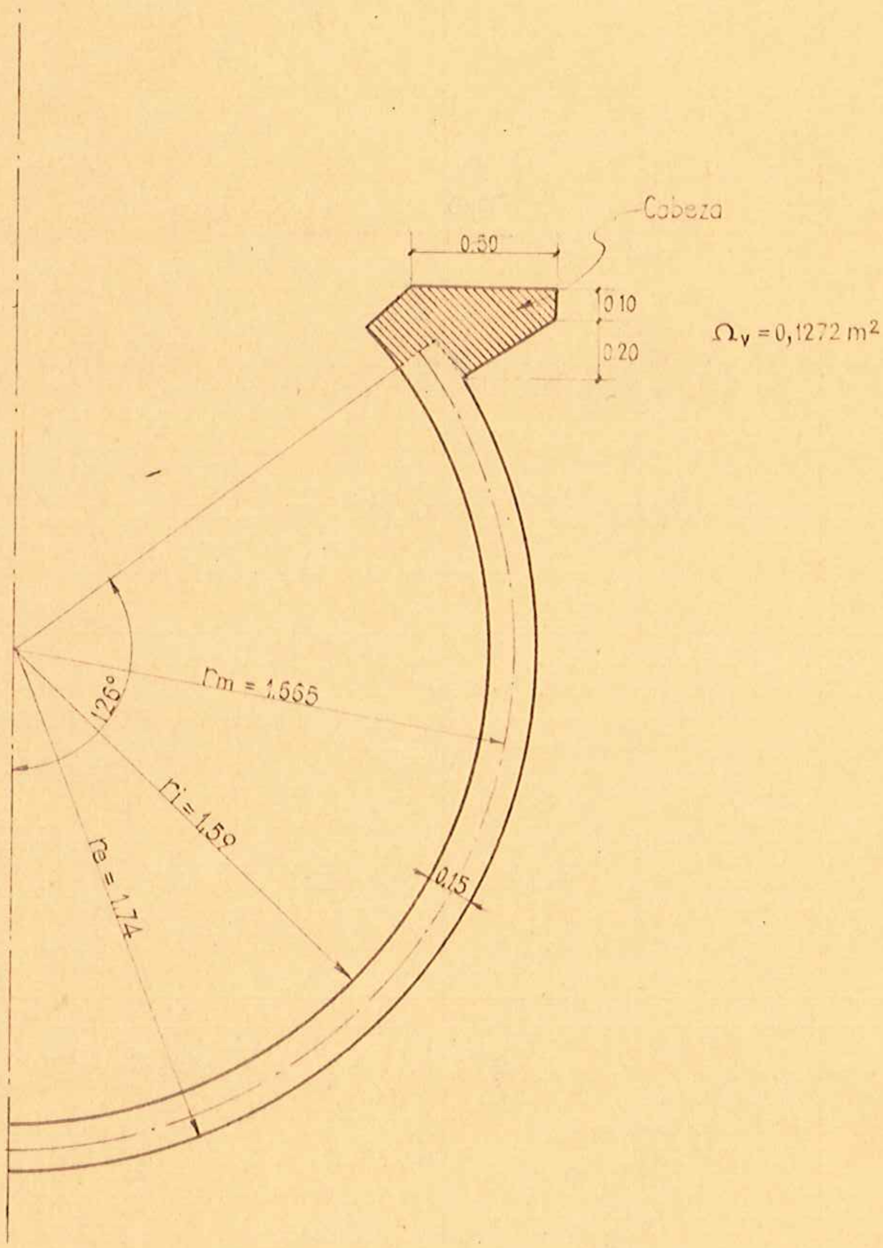
Cabeza
0,50
0,10
0,20
$\Omega_v = 0{,}1272\ m^2$
126°
$r_m = 1{,}665$
$r_i = 1{,}59$
$r_e = 1{,}74$
0,15

Fig. 0

Las fuerzas tanto exteriores (presión hidrostática) como el peso propio se suponen uniformes a lo largo de la generatriz y con los valores siguientes:

Peso propio = carga vertical de valor = 0,15 . .2.400 = 360 Kg/m^2

Presión hidrostática = carga normal a la pared variable con la altura = 1.000 · h Kg/m^2

En todo el cálculo se han considerado las cargas desarrolladas en serie de Fourier a lo largo de las generatrices, limitándose este desarrollo a los dos primeros términos de la serie, ya que la pequeña importancia del 2º término con relación al primero permite despreciar la influencia de los restantes.

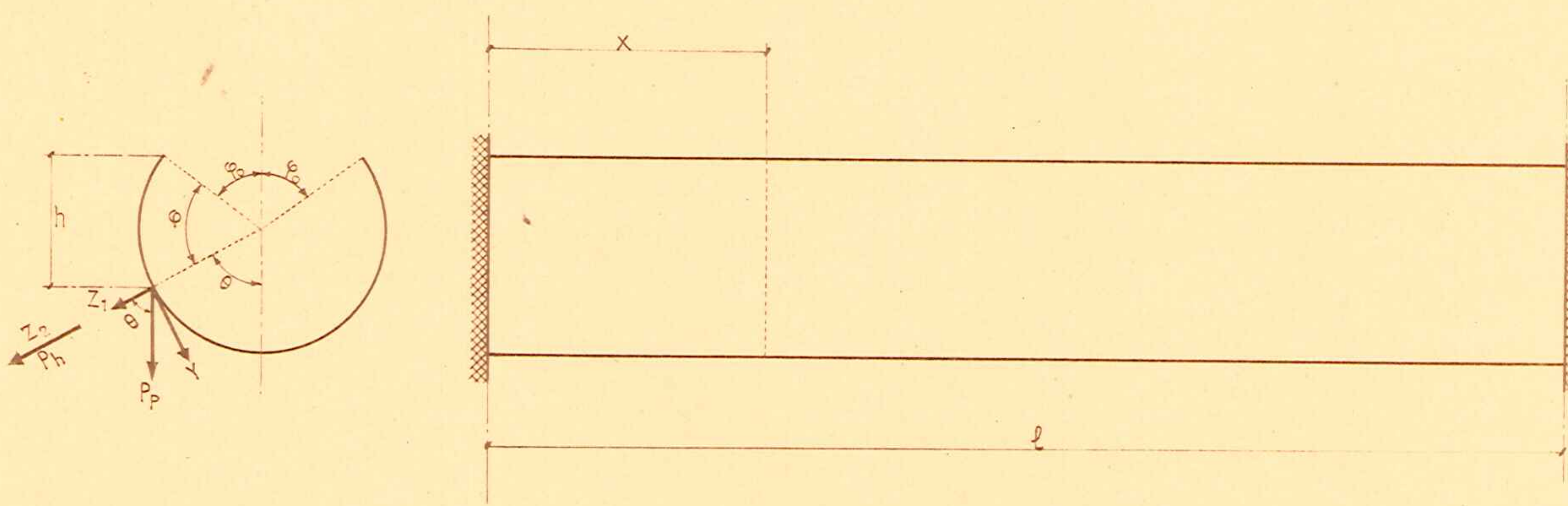

Fig. 1

Determinación de las expresiones de los esfuerzos y recorridos en la lámina.

Como en este caso, las condiciones en los bordes frontales son de empotramiento perfecto, hay que hallar las expresiones de los esfuerzos y recorridos con la condición de que los corrimientos en los apoyos sean nulos.

A continuación se estudian los esfuerzos y recorridos membrana para acueducto lleno. Ver figura 1.

La presión hidrostática vale:

$$Z_2 = p_h = 1.000\ h = 1.000\ r\left[\cos\varphi_0 - \cos(\varphi + \varphi_0)\right.$$

La componente normal a la lámina del peso propio tiene de expresión:

$$Z_1 = p_p \cdot \cos\theta = -360 \cos(\varphi + \varphi_0)$$

y la componente tangencial:

$$Y = -p_p \operatorname{sen}\theta = -360 \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_0)$$

De lo anterior se deduce que la componente normal y tangencial a la lámina de las cargas exteriores tienen las siguientes expresiones:

$$Z = 1000\ r \cos \varphi_0 - (1000\ r + 360) \cos(\varphi + \varphi_0)$$

$$Y = -360 \operatorname{sen} (\varphi + \varphi_0)$$

y desarrollando las cargas en serie de Fourier, tomando como origen el borde frontal se tiene:

$$Z = \frac{4}{n\pi} \cdot \left[1000\ r \cos \varphi_0 - (1000\ r + 360) \cos(\varphi + \varphi_0)\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

$$Y = \frac{-4}{n\pi} \cdot 360 \operatorname{sen} (\varphi + \varphi_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

y las expresiones de los esfuerzos se obtendrán, como siempre , mediante cuadraturas sucesivas:

$$N_{\varphi_m} = Zr = \frac{4r}{n\pi} \left[1000\ r \cos \varphi_0 - (1000\ r + 360) \cos(\varphi + \varphi_0)\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

$$N_{\varphi x_m} = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial N_{\varphi_m}}{\partial \varphi} dx + \int Y\, dx + f_1(\varphi) = \frac{4l}{n^2\pi^2} (1000\ r +$$

$$+ 720) \operatorname{sen} (\varphi + \varphi_0) \cos \frac{n\pi x}{l} + f_1 (\varphi)$$

Teniendo en cuenta la simetría para el centro del vano ($x = \frac{l}{2}$) el esfuerzo tangencial $N_{\varphi x_m}$ debe ser cero y esta condición da el valor de $f_1(\varphi)$ que será

$$f_1(\varphi) = 0$$

$$N_{x_m} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N_{\varphi x_m}}{\partial \varphi} dx + f_2(\varphi) = -\frac{4\,l^2}{rn^3\pi^3}(1000\ r + 720)\cos(\varphi + \varphi_0)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{l} + f_2(\varphi)$$

$$u_m = \frac{r}{Et}\int \frac{N_{x_m}}{r} dx + f_3(\varphi) = -\frac{1}{Et}\ \frac{4l^3}{rn^4\pi^4}(\ 1000\ r + 720)\ \cos(\varphi + \varphi_0)\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{Et}\ x\cdot f_2(\varphi) + f_3(\varphi)$$

$$v_m = -\int \frac{1}{r}\ \frac{\partial u_m}{\partial \varphi} dx + \frac{2r}{Et}\int \frac{N_{\varphi x_m}}{r} dx + f_4(\varphi) = \frac{4l^2}{n^3\pi^3}\ \frac{1}{Et}(1000\,r + 720)\ (2 + \frac{l^2}{r^2n^2\pi^2})\,\text{sen}(\varphi + \varphi_0)\,\text{sen}\ \frac{n\pi x}{l} - \frac{1}{Et}\ \frac{x^2}{2r}\ \frac{d}{d\varphi}\ f_2(\varphi) - \frac{x}{r}\ \frac{d}{d\varphi}\ f_3(\varphi) + f_4(\varphi)$$

$$w_m = -\frac{\partial v_m}{\partial \varphi} + \frac{r}{Et} N_{\varphi_m} = -\frac{4l^2}{n^3\pi^3}\frac{1}{Et}(1000\ r + 720)(2 +$$

$$+ \frac{l^2}{n^2\pi^2 r^2})\ \cos(\varphi + \varphi_0)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{l} + \frac{4r^2}{n\pi} \cdot \frac{1}{Et}\Big[1000\ r \cos\varphi_0 -$$

$$-(1000\ r + 360)\cos(\varphi + \varphi_0)\Big]\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{l} + \frac{d}{d\varphi} f_4\ (\varphi) -$$

$$- \frac{1}{Et}\frac{x^2}{2r}\frac{d^2}{d\varphi^2} f_2(\varphi) - \frac{x}{r}\frac{d^2}{d\varphi^2} f_3(\varphi)$$

Las funciones $f_2(\varphi)$, $f_3(\varphi)$ y $f_4(\varphi)$ se determinarán con las condiciones de sustentación de - los dos apoyos frontales, es decir, para los valores $x = 0$ y $x = l$, los corrimientos deben ser nulos, $u_m = v_m = w_m = 0$

$$x = 0 \quad u_m = 0 \quad " \quad f_3(\varphi) = -\frac{1}{Et}\frac{4l^3}{rn^4\pi^4}(1000\ r + 720) \cdot \cos\ (\varphi + \varphi_0)$$

$$x = l \quad u_m = 0 \quad " \quad f_2(\varphi) = 2\ \frac{4l^2}{rn^4\pi^4}\ (1000\ r + 720)\ \cos\ (\varphi + \varphi_0)$$

$$x = 0 \quad v_m = 0 \quad " \quad f_4(\varphi) = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = l & v_m = 0 \\ x = 0 & w_m = 0 \\ x = l & w_m = 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen idénticamente con los valores hallados anteriormente para las funciones de φ.

Sustituyendo estos valores de $f_2(\varphi)$, $f_3(\varphi)$ y $f_4(\varphi)$ en las expresiones de los esfuerzos y recorridos se tienen las siguientes expresiones:

<u>Esfuerzos membrana.- Acueducto lleno</u>

$$\left.\begin{aligned}
N_{\varphi_m} &= \frac{4r}{n\pi}\left[1000\ r\cos\varphi_0 - (1000\ r + 360)\cos(\varphi+\varphi_0)\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \\
N_{\varphi x_m} &= \frac{4l}{n^2\pi^2}(1000\ r + 720)\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_0)\cos\frac{n\pi x}{l} \\
N_{x_m} &= \frac{4l^2}{r\pi^3 n^3}(1000\ r + 720)\cos(\varphi+\varphi_0)\left[\frac{2}{n\pi} - \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right] \\
u_m &= \frac{1}{Et}\,\frac{4l^3}{rn^4\pi^4}(1000\ r + 720)\cos(\varphi+\varphi_0)\left[\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{2x}{l} - 1\right] \\
v_m &= \frac{1}{Et}\,\frac{4l^2}{r^2 n^3\pi^3}(1000\ r + 720)\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_0)\left[\left(2r^2 + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x}{n\pi}(x - l)\right]
\end{aligned}\right\}(I)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
W_m = & -\frac{1}{Et}\,\frac{4l^2}{r^2 n^3 \pi^3}\,(1000\ r + 720)\ \cos\ (\varphi + \varphi_0)\Big[\Big(2r^2 + \\
& + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\Big)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} + \frac{x}{n\pi}(x-l)\Big] + \frac{1}{Et}\,\frac{4r^2}{n\pi}\Big[(1000\ r\ \cos\varphi_0 - \\
& -(1000\ r + 360)\ \cos\ (\varphi + \varphi_0)\Big].\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}
\right) \text{(I)}
$$

<u>Esfuerzos membrana.- Acueducto vacío</u>

En este caso:

$$Z = -\frac{4}{n\pi}\ 360\ \cos\ (\varphi + \varphi_0)\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$Y = -\frac{4}{n\pi}\ 360\ \operatorname{sen}\ (\varphi + \varphi_0)\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

y análogamente al caso de acueducto lleno se obte<u>n</u>drían las expresiones siguientes:

$$
\left.
\begin{aligned}
N_{\varphi_m} &= -\frac{4r}{n\pi}\ 360\ \cos\ (\varphi + \varphi_0)\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \\
N_{\varphi x_m} &= \frac{4l}{n^2\pi^2}\ 720\ \operatorname{sen}\ (\varphi + \varphi_0)\ \cos\frac{n\pi x}{l} \\
N_{x_m} &= \frac{4l^2}{r n^3 \pi^3}\ 720\ \cos(\varphi + \varphi_0)\left[\frac{2}{n\pi} - \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right]
\end{aligned}
\right\} \text{(II)}
$$

$$\left.\begin{aligned}
u_m &= \frac{1}{Et}\,\frac{4l^3}{rn^4\pi^4}\,720\cos(\varphi+\varphi_0)\left[\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{2x}{l}-1\right]\\
v_m &= \frac{1}{Et}\,\frac{4l^2}{r^2n^3\pi^3}\,720\,\mathrm{sen}(\varphi+\varphi_0)\left[\left(2r^2+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{x}{n\pi}(x-l)\right]\\
w_m &= -\frac{1}{Et}\,\frac{4l^2}{r^2n^3\pi^3}\,720\cos(\varphi+\varphi_0)\left[\left(2r^2+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{x}{n\pi}(x-l)\right]-\frac{1}{Et}\,\frac{4r^2}{n\pi}\,360\cos(\varphi+\varphi_0)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}\right\}\;(\mathrm{II})$$

<u>Esfuerzos debidos al estado homogéneo.</u>

Si se designa con el subíndice <u>s</u> los esfuerzos y recorridos debidos a la lámina simplemente apoyada en los extremos, los esfuerzos y recorridos correspondientes a otra sustentación distinta serán:

$$N_\varphi = N_{\varphi_s}$$

$$N_{\varphi x} = N_{\varphi x_s} + f_1(\varphi)$$

$$N_x = N_{x_s} - \frac{x}{r}\frac{d}{d\varphi} f_1(\varphi) + f_2(\varphi)$$

$$u = u_s - \frac{r}{Et}\left[\frac{x^2}{2r^2}\frac{d}{d\varphi} f_1(\varphi) - \frac{x}{r} f_2(\varphi)\right] + f_3(\varphi)$$

$$v = v_s + \frac{r}{Et}\left[\frac{x^3}{6r^3}\frac{d^2}{d\varphi^2} f_1(\varphi) + \frac{2x}{r} f_1(\varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{x^2}{2r^2}\frac{d}{d\varphi} f_2(\varphi)\right] - \frac{x}{r}\frac{d}{d\varphi} f_3(\varphi) + f_4(\varphi)$$

$$w = w_s + \frac{r}{Et}\left[- \frac{x^3}{6r^3}\frac{d^3}{d\varphi^3} f_1(\varphi) - 2\frac{x}{r}\frac{d}{d\varphi} f_1(\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2}{2r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2} f_2(\varphi)\right] + \frac{x}{r}\frac{d^2}{d\varphi^2} f_3(\varphi) - \frac{d}{d\varphi} f_4(\varphi)$$

Si se pone la condición de empotramiento y la de simetría del sistema respecto al esfuerzo $N_{\varphi x}$, es decir, $u = v = w = 0$ para los extremos de la lámina $x = 0$ y $x = l$ y $N_{\varphi x} = 0$ para $x = \frac{l}{2}$ se obtienen los valores siguientes para las funciones $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$, $f_3(\varphi)$ y $f_4(\varphi)$.

$$f_1\ (\varphi) = 0$$

$$f_2\ (\varphi) = 2\,\frac{Et}{l}\,(u_s)_{x\,=\,0}$$

$$f_3\ (\varphi) = -\,(u_s)_{x\,=\,0}$$

$$f_4\ (\varphi) = 0$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones anteriores y en las que dan los momentos flectores y de torsión y esfuerzos cortantes normales a la lámina se tiene:

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{l}
N_\varphi = N_{\varphi s} \\
N_{\varphi x} = N_{\varphi x_s} \\
N_x = N_{x_s} + 2\,\frac{Et}{l}\,(u_s)_{x\,=\,0} \\
u = u_s + (u_s)_{x\,=\,0}\cdot\left(2\,\frac{x}{l} - 1\right) \\
v = v_s + \frac{x}{r}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\,\frac{d}{d\varphi}\,(u_s)_{x\,=\,0} \\
w = w_s + \frac{x}{r}\left(\frac{x}{l} - 1\right)\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\,(u_s)_{x\,=\,0}
\end{array}\right.$$

$$
\text{(III)}\left\{
\begin{aligned}
M_x &= \frac{Et^3}{12r^2}\,\frac{d^2w}{dx^2}\cdot r^2 = M_{x_s} + \frac{2r}{l}\,Et\beta\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\,(u_s)_{x=0}\\
M_\varphi &= \frac{Et^3}{12r^2}\left(\frac{d^2w}{d\varphi^2}-\frac{dv}{d\varphi}\right) = M_{\varphi s} - \frac{Et\beta}{r}x\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)_{x=0} +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{d^2}{d\varphi^2}\,(u_s)_{x=0}\right]\\
M_t &= \frac{Et^3}{12r^2}r\left(\frac{d^2w}{dx\,d\varphi}-\frac{dv}{dx}\right) = M_{t_s} - Et\beta\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left[\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{d}{d\varphi}\,(u_s)_{x=0}\right]\\
Q_\varphi &= \frac{1}{r}\left[\frac{d}{d\varphi}M_\varphi + r\,\frac{d}{dx}M_t\right] = Q_{\varphi s} - \frac{Et\beta l}{r^2}\,\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[\frac{d^5}{d\varphi^5}\,(u_s)_{x=0} +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{d^3}{d\varphi^3}\,(u_s)_{x=0}\right] + \frac{2Et\beta}{l}\left[\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} + \frac{d}{d\varphi}(u_s)_{x=0}\right]\\
Q_x &= \frac{1}{r}\left[r\,\frac{d}{dx}\,M_x + \frac{d}{d\varphi}\,M_t\right] = Q_{x_s} - \frac{Et\beta}{r}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left[\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)_{x=0} +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{d^2}{d\varphi^2}\,(u_s)_{x=0}\right]\\
R_\phi &= Q_\varphi + \frac{d}{dx}\,M_t = R_{\phi s} + \frac{4r}{l}\,\frac{Et\beta}{r}\left[\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} + \frac{d}{d\varphi}(u_s)_{x=0}\right] -\\
&\qquad - \frac{x}{r}\left(1-\frac{x}{r}\right)\frac{Et\beta}{r}\left[\frac{d^5}{d\varphi^5}(u_s)_{x=0} + \frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

CALCULO NUMERICO.

Estado membrana

En el caso de acueducto lleno se tiene dando valores a las expresiones (I) y haciendo - n = 1 para el primer término de la serie, y n = 3 para el segundo:

N_{φ_m} (1er término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	-138,62	297,78	779,8	1243,4	1627,0	1879,6	1967,7
0,2	-263,67	566,40	1483,2	2365,0	3094,6	3575,2	3742,8
0,3	-362,91	779,58	2041,5	3255,2	4259,4	4920,8	5151,5
0,4	-426,63	916,46	2399,9	3826,7	5007,3	5784,8	6056,0
0,5	-448,58	963,62	2523,4	4023,6	5264,9	6082,5	6367,6

N_{φ_m} (2º término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	-120,97	259,86	680,50	1085,1	1419,8	1640,3	1717,2
0,2	-142,21	305,49	799,97	1275,6	1669,1	1928,3	2018,7
0,3	-46,20	99,260	259,93	414,4	542,3	626,5	655,9
0,4	87,89	-188,80	-494,41	-788,3	-1031,5	-1191,7	-1247,6
0,5	149,53	-321,21	-841,14	-1341,2	-1755,0	-2027,5	-2122,5

$N_{\varphi x_m}$ (1er término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	15.640	18.673	19.226	17.225	12.936	6.928	0
0,1	14.874	17.760	18.285	16.382	12.303	6.589	0
0,2	12.653	15.107	15.554	13.935	10.465	5.605	0
0,3	9.192	10.976	11.301	10.125	7.603	4.072	0
0,4	4.833	5.770	5.941	5.323	3.997	214	0
0,5	0	0	0	0	0	0	0

$N_{\varphi x_m}$ (2º término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	1.738	2.074	2.136	1.914	1.437	770	0
0,1	1.021	1.219	1.255	1.125	845	452	0
0,2	-537	-641	-660	-591	-444	-238	0
0,3	-1.653	-1.973	-2.032	-1.820	-1.367	-732	0
0,4	-1.406	-1.678	-1.728	-1.548	-1.163	-623	0
0,5	0	0	0	0	0	0	0

N_{x_m} (1er término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	27.659	12.179	-4.918	-21.364	-34.970	-43.932	-47.057
0,1	14.233	6.267	-2.531	-10.994	-17.995	-22.607	-24.215
0,2	2.121	934	-377	-1.638	-2.682	-3.369	-3.609
0,3	-7.490	-3.298	1.332	5.785	9.470	11.897	12.743
0,4	-13.661	-6.015	2.429	10.552	17.272	21.699	23.242
0,5	-15.787	-6.952	2.807	12.194	19.961	25.070	26.860

N_{x_m} (2º término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	341	150	-61	-264	-432	-542	-581
0,1	-960	-423	171	742	1.214	1.525	1.634
0,2	-1.189	-523	211	918	1.503	1.888	2.023
0,3	-156	-68	28	120	197	247	265
0,4	1.287	567	-229	-994	-1.628	-2.045	-2.190
0,5	1.951	859	-347	-1.507	-2.466	-3.098	-3.319

Para el caso de acueducto vacío,se tiene análogamente mediante las expresiones (II)

N_{φ_m} (1er término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	-138,62	-61,04	24,65	107,07	175,26	220,17	235,84
0,2	-263,67	-116,10	46,89	203,65	333,36	418,79	448,58
0,3	-362,91	-159,80	64,54	280,31	458,83	576,41	617,42
0,4	-426,63	-187,86	75,87	329,52	539,39	677,62	725,82
0,5	-448,58	-197,53	79,77	346,48	567,15	712,49	763,18

N_{φ_m} (2º término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	-120,97	-53,26	21,51	93,43	152,94	192,14	205,81
0,2	-142,21	-62,62	25,29	109,84	179,79	225,87	241,94
0,3	-46,20	-20,34	8,21	35,69	58,42	73,39	78,61
0,4	87,89	38,70	-15,63	-67,88	-111,12	-139,60	-149,52
0,5	149,52	65,84	-26,59	-115,49	-189,05	-237,50	-254,39

$N_{\varphi x_m}$ (1er término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	4.721,5	5.637,3	5.804,1	5.200,0	3.905,1	2.091,5	0
0,1	4.490,4	5.361,4	5.520,0	4.945,5	3.714,0	1.989,1	0
0,2	3.820,7	4.560,7	4.695,6	4.206,9	3.159,3	1.692,1	0
0,3	2.775,2	3.313,5	3.411,6	3.056,5	2.295,4	1.229,4	0
0,4	1.459,6	1.742,0	1.793,6	1.606,9	1.206,8	646,3	0
0,5	0	0	0	0	0	0	0

$N_{\varphi x_m}$(2º término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	524,61	626,37	644,90	577,78	433,90	232,39	0
0,1	308,36	368,17	379,06	339,61	255,04	136,60	0
0,2	-162,11	-193,56	-199,29	-178,55	-134,08	-71,81	0
0,3	-498,94	-595,72	-613,34	-549,50	-412,66	-221,02	0
0,4	-424,42	-506,74	-521,73	-467,43	-351,03	-188,01	0
0,5	0	0	0	0	0	0	0

N_{x_m}(1er término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	8.350	3.676	-1.485	-6.450	-10.557	-13.262	-14.206
0,1	4.296	1.892	-764	-3.319	-5.433	-6.825	-7.310
0,2	640	282	-114	-495	-810	-1.017	-1.090
0,3	-2.261	-996	402	1.747	2.859	3.591	3.847
0,4	-4.124	-1.816	733	3.186	5.214	6.550	7.017
0,5	-4.766	-2.099	847	3.681	6.026	7.570	8.109

N_{x_m} (2º término)

x/ℓ \ φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
0	103,0	45,3	-18,3	-79,6	-130,3	-163,7	-175,3
0,1	-289,9	-127,6	51,5	223,9	366,5	460,4	493,2
0,2	-358,9	-158,0	63,8	277,2	453,7	570,0	610,6
0,3	-47,0	-20,7	8,3	36,3	59,4	74,6	80,0
0,4	388,6	171,1	-69,1	-300,1	-491,3	-617,2	-661,1
0,5	588,8	259,3	-104,7	-454,8	-744,5	-935,5	-1.001,9

Resolución de la ecuación característica.

La ecuación característica de las láminas cilíndricas es una ecuación de octavo grado que, en este caso, tiene la forma:

$$m^8 + (2 - 4\alpha^2)\, m^6 + (1 + 6\,\alpha^4 - 7\alpha^2 + \beta\alpha^4)m^4 +$$
$$+ (-3\alpha^2 + 6\,\alpha^4 - 4\alpha^6 - 3\beta\alpha^6)\;\; m^2 +$$
$$+ \alpha^4(1 + 2\beta)(\frac{1}{\beta} + \alpha^4) = 0$$

Siendo:

$$\alpha = \frac{n \pi r}{l} \qquad y \qquad \beta = \frac{t^2}{12r^2}$$

Reduciendo la ecuación anterior a una de cuarto grado y ésta a una de tercero y resolviendo esta última por el método trigonométrico, se pueden obtener las ocho raices de la primera ecuación citada que serán de la forma:

$$m_{1,2,3,4.} = \pm \rho (a \pm bi) \qquad m_{5,6,7,8.} = \pm \rho (c \pm di)$$

En el cuadro siguiente se ha sistematizado la resolución de la ecuación característica hasta llegar a los valores de ρ, a, b, c y d.

Número	Expresión	Cálculo	Cantidad numérica	
			1er término	2º término
1	r		1,665	1,665
2	l		20	20
3	$\alpha = \frac{n\pi r}{l}$	$n \cdot \pi \frac{(1)}{(2)}$	0,26153758	0,78461274
4	t		0,15	0,15
5	$\beta = \frac{t^2}{12\, r^2}$	$\frac{1}{12}\,\frac{(4)^2}{(1)^2}$	0,00067635203	0,00067635203
6	$\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{\beta}}{2\,\alpha^2}$	$\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{(5)}}{2\,\cdot\,(3)^2}$	0,32926748	0,036585274
7	$\frac{1}{2} + \alpha^2$	$\frac{1}{2} + (3)^2$	0,56840191	1,11561715
8	$\frac{2+12\alpha^2+51\alpha^4+106\alpha^6+108\alpha^8}{72\alpha^4}\cdot\beta$		0,006215371	0,0017092507
9	$\left[1 + \frac{(1+4\alpha^2+13\alpha^4+12\alpha^6)\beta}{12\,\alpha^4}\right]^2$		1,0325025	1,00333077
10	sen 3Δ	$\frac{(6)\cdot\left[(7)+(8)\right]}{\sqrt[3]{(9)}}$	0,18719623	0,040832401
11	sen Δ		0,06272745	0,013614164
12	cos Δ		0,9980307	0,9999074
13	q	$\sqrt[4]{(9)}$	1,0080284	1,0008317
14	$\left(\cos\Delta + \frac{\operatorname{sen}\Delta}{\sqrt{3}}\right) q$	$\left[(12) + \frac{(11)}{\sqrt{3}}\right](13)$	1,0425498	1,0086056

Número	Expresión	Cálculo	Cantidad numérica	
			1er término	2º término
15	$(\cos\Delta - \frac{\operatorname{sen}\Delta}{\sqrt{3}})\,q$	$\left[(12) - \frac{(11)}{\sqrt{3}}\right](13)$	0,9925332	0,0287235
16	$\frac{\sqrt{\beta}}{3\alpha^2}(\frac{1}{2}+\alpha^2-\beta\alpha^4)$		0,07203071	0,01570153
17	$\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{\beta}}{\alpha}(\frac{1}{2}-\alpha^2)$	$\frac{\sqrt{2}}{(3)}\sqrt[4]{(5)}\cdot\left[\frac{1}{2}-(3)^2\right]$	0,3703013	-0,03300039
18	$\frac{2\cdot\operatorname{sen}\Delta}{\sqrt{3}}\cdot q$	$\frac{2}{\sqrt{3}}(11)\cdot(13)$	0,0730120	0,0157336
19	g_1	$\sqrt{(14)+(16)}-(17)$	0,6793987	1,0450005
20	h_1	$\sqrt{(15)-(18)}+\sqrt{(14)-(16)}$	0,9801944	0,9937342
21	g_2	$-\sqrt{(14)+(16)}-(17)$	-1,4320063	-0,6704766
22	h_2	$\sqrt{(15)-(18)}-\sqrt{(14)-(16)}$	0,9161108	0,9330152
23	$\sqrt{g_1^2+h_1^2}$	$\sqrt{(19)^2+(20)^2}$	1,1913430	1,4425573
24	$\sqrt{g_2^2+h_2^2}$	$\sqrt{(21)^2+(22)^2}$	1,7332485	1,3371986
25	a	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(23)+(19)}$	0,9671357	1,1154028
26	b	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(23)-(19)}$	0,5059080	0,4454018
27	c	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(24)+(21)}$	0,3381255	0,4520981
28	d	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(24)-(21)}$	1,2514290	1,0075315
29	ρ	$\sqrt{\frac{(3)}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(5)}}}$	1,0730733	1,0540064

Estado homogéneo

A continuación se determinan los coeficientes de los esfuerzos y recorridos del estado homogéneo para el caso de lámina apoyada en los dos extremos. Una vez conocidos estos coeficientes se tendrán las expresiones de estos esfuerzos y recorridos que sustituídas en las ecuaciones (III) nos darán los esfuerzos y recorridos en el caso de lámina empotrada y se tendrá preparado el camino para plantear las ecuaciones a que dan lugar las condiciones en los bordes longitudinales.

Los coeficientes buscados se determinan en el cuadro siguiente:

Número	Expresión	Cálculo	Cantidad numérica	
			1^er^ término	2° término
30	$\lambda = \frac{\alpha^2}{\rho^2}$	$\frac{(3)^2}{(29)^2}$	0,05964797	0,17894250
31	$a^2 - b^2 - \lambda$	$(25)^2 - (26)^2 - (30)$	0,61973163	0,80674703
32	$a^2 - b^2 - 2\lambda$	$(31) - (30)$	0,5900436	0,60780453
33	$c^2 - d^2 - \lambda$	$(27)^2 - (28)^2 - (30)$	-1,49174711	-1,15741003
34	$c^2 - d^2 - 2\lambda$	$(33) - (30)$	-1,55139462	-1,33636133
35	$a^2 + b^2 - 2\lambda$	$(25)^2 + (26)^2 - 2\,(30)$	1,07202877	1,08467229
36	$-a^2 - b^2 - 2\lambda$	$-(25)^2 - (26)^2 - 2\,(30)$	-1,31061681	-1,60044230
37	$c^2 + d^2 - 2\lambda$	$(27)^2 + (28)^2 - 2\,(30)$	1,59075458	1,02930557
38	$-c^2 - d^2 - 2\lambda$	$-(27)^2 - (28)^2 - 2\,(30)$	-1,81934462	-1,7450757
39	$a^2 - 3b^2 - 2\lambda$	$(25)^2 - 3(26)^2 - 2\,(30)$	0,04813993	0,29093677
40	$3a^2 - b^2 - 2\lambda$	$3\,(25)^2 - (26)^2 - 2\,(30)$	2,43078751	3,17605133
41	$c^2 - 3d^2 - 2\lambda$	$(27)^2 - 3(28)^2 - 2\,(30)$	-4,08354382	-3,70202803
42	$3c^2 - d^2 - 2\lambda$	$3\,(27)^2 - (28)^2 - 2\,(30)$	-1,28344462	-0,92764089
43	$(a^2 - b^2 - \lambda)^2 - 4a^2b^2$	$(31)^2 - 4(25)^2(26)^2$	-0,57362843	-0,23625400
44	$1 : \left[(a^2 - b^2 - 2\lambda)^2 + 4a^2b^2\right]$	$1 : \left[(32)^2 + 4(25)^2(26)^2\right]$	0,78054030	0,68465950
45	$(c^2 - d^2 - \lambda)^2 - 4c^2d^2$	$(33)^2 - 4(27)^2(28)^2$	1,3903500	0,37273634
46	$1 : \left[(c^2 - d^2 - 2\lambda)^2 + 4c^2d^2\right]$	$1 : \left[(34)^2 + 4(27)^2(28)^2\right]$	0,30806340	0,36327390
47		$1 + \frac{(30)^2 \cdot (43)}{4}$	0,99948978	0,99810876
48		$1 - \frac{(30)^3 \cdot (39)}{4 \cdot (3)^2}$	0,99996266	0,99932303
49		$(30)^2 \cdot (26)^2 \cdot (31)$	0,0005643926	0,0055072555
50		$(30)^2 \cdot (25)^2 \cdot (31)$	0,0020623548	0,03452890 6

Número	Expresión	Cálculo	Cantidad numérica	
			1^{er} término	2^{o} término
51		$1 - \frac{(30)^3 \cdot (40)}{4(3)^2}$	0,99611463	0,99260978
52		$1 + \frac{(30)^2 \; (45)}{4}$	1,00123283	1,00298379
53		$1 - \frac{(30)^3 \; (41)}{4.(3)^2}$	1,00363265	1,00614090
54		$(30)^2 \, . \, (28)^2 \, . \, (33)$	-0,008311746	-0,043837030
55		$(30)^2 \, . \, (29)^2 \, . \, (33)$	-0,0007110556	-0,007573688
56		$1 - \frac{(30)^3 \; (42)}{4.(3)^2}$	1,00099546	1,002158501
57		$\frac{(47)(48) + (49) \, . \, (51)}{(25)^2(48)^2 + (26)^2(51)^2} \; (25)$	0,81253418	0,77793806
58	v_s	$\frac{(47)(51) - (50) \; (48)}{(25)^2(48)^2 + (26)^2 \; (51)^2} \; (26)$	0,42315943	0,29622706
59		$\frac{(52)(53) + (54) \; (56)}{(27)^2(53)^2 + (28)^2(56)^2} \; (27)$	0,21404480	0,31339855
60		$\frac{(52)(56) - (55) \; (53)}{(27)^2(53)^2 + (28)^2(56)^2} \; (28)$	0,73650590	0,78912367
61		$\left[(25)(35)(57) + (26)(36)(58)\right] . \, (44)$	0,44191016	0,48172955
62		$\left[(25)(35)(58) - (26)(36)(57)\right] . \, (44)$	0,76835478	0,67255056
63		$\left[(27)(37)(59) + (28)(38)(60)\right] . \, (46)$	-0,47842758	0,49109574
64	u_s y N_{x_s}	$\left[(27)(37)(60) - (28)(38)(59)\right] . \, (46)$	-0,28140769	0,34946490
65		$(43) + \frac{(30)}{(3)^2} \left[(25)(39)(57) + (26)(40)(58)\right]$	-0,03683313	-0,041053302
66		$-4(25)(26)(31) + \frac{(30)}{(3)^2} \left[(25)(39)(58) - (26)(40)(57)\right]$	-2,06716683	-2,0146093
67	N_{φ_s}	$(45) + \frac{(30)}{(3)^2} \left[(27)(41)(59) + (28)(42)(60)\right]$	0,03454131	-0,01113157
68		$-4(27)(28)(32) + \frac{(30)}{(3)^2} \left[(27)(41)(60) - (28)(42)(59)\right]$	1,9319997	1,9842211

Número	Expresión	Cálculo	Cantidad numérica	
			1er término	2º término
69	$B_{\varphi x_s}$	$\left[(32)(57) - 2(25)(26)(58)\right] \cdot (44)$	0,0322003	0,1047070
70		$\left[(32)(58) + 2(25)(26)(57)\right] \cdot (44)$	0,8184118	0,6878150
71		$\left[(34)(59) - 2(27)(28)(60)\right] \cdot (46)$	-0,3101587	-0,6302522
72		$\left[(34)(60) + 2(27)(28)(59)\right] \cdot (46)$	-0,2015804	-0,4711437
73	B_{φ_s}	$(25)^2 - (26)^2 + \frac{(30)}{(3)^2}\left[(25)(57) + (26)(58)\right]$	1,591275	1,330297
74		$-2(25)(26) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[(25)(58) - (26)(57)\right]$	-0,900225	-0,9864054
75		$(27)^2 - (28)^2 + \frac{(30)}{(3)^2}\left[(27)(59) + (28)(60)\right]$	-0,5325747	-0,8783044
76		$-2(27)(28) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[(27)(60) - (28)(59)\right]$	-0,9140125	-0,9789462
77	C_{x_s}	$(31) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[(25)(57) + (26)(58)\right]$	1,4916027	1,157232
78		(74)	-0,900225	-0,9864054
79		$(33) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[(27)(59) + (28)(60)\right]$	-0,6970487	-0,8827330
80		(76)	-0,9140125	-0,9789462
81	C_{φ_s}	$-(25)\left[(39) + (30)\right] - \frac{(30)}{(3)^2}\left[2(25)(26)(58) + (31)(57)\right]$	-0,0487705	-0,0000074
82		$(26)\left[(40) + (30)\right] - \frac{(30)}{(3)^2}\left[(31)(58) - 2(25)(26)(57)\right]$	1,8945335	1,5648753
83		$-(27)\left[(41) + (30)\right] - \frac{(30)}{(3)^2}\left[2(27)(28)(60) + (33)(59)\right]$	1,6043956	1,5534250
84		$(28)\left[(42) + (30)\right] - \frac{(30)}{(3)^2}\left[(33)(60) - 2(27)(28)(59)\right]$	-0,4758117	-0,0583462
85	N_{t_s}	$-(25) - \frac{(30)}{(3)^2}(57)$	-1,875782	-1,315274
86		$(26) - \frac{(30)}{(3)^2}(58)$	0,1303540	0,3575435
87		$-(27) - \frac{(30)}{(3)^2}(59)$	-0,9520760	-0,5431549
88		$(28) - \frac{(30)}{(3)^2}(60)$	0,8001040	0,6584055

Número	Expresión	Cálculo	Cantidad numérica	
			1er término	2º término
89		$-(25)(39) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[-(32)(57)-2(25)(26)(58)\right]$	-0,8043917	-0,5950841
90		$(26)(40) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[-(32)(58)+2(25)(26)(57)\right]$	1,7105487	1,5502538
91	${}^{R}\phi_{s}$	$-(27)(41) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[-(34)(59)-2(27)(28)(60)\right]$	1,4154976	1,5372597
92		$(28)(42) + \frac{(30)}{(3)^2}\left[-(34)(60)+2(27)(28)(59)\right]$	-0,4387249	-0,0127754
93		$(89) \cdot \frac{(30)}{(3)}$	0,1078413	0,1089953
94		$(90) \cdot \frac{(30)}{(3)}$	0,1759496	0,1533558
95		$(91) \cdot \frac{(30)}{(3)}$	-0,1001240	-0,1120183
96		$(92) \cdot \frac{(30)}{(3)}$	0,08417174	0,07870025
97		$-(28)\left[(25)(93) + (26)(94)\right]$	-0,1993297	-0,3546897
98	$\frac{d}{d\varphi}(u_s)$	$(28)\left[(26)(93) - (25)(94)\right]$	-0,1270078	-0,2259833
99		$-(28)\left[(27)(95) + (28)(96)\right]$	-0,0432038	-0,0080536
100		$(28)\left[(28)(95) - (27)(96)\right]$	-0,1713010	-0,2427314
101		$(25)^2 - (26)^2$	0,8737037	1,049805
102		$2 \cdot (25)(26)$	0,9791844	0,9373483
103		$(27)^2 - (28)^2$	-1,424083	-0,9704926
104		$2 \cdot (27)(28)$	0,9101108	0,9833010
105		$(28)^2\left[(93)(101) + (94)(102)\right]$	0,2753514	0,0192504
106	$\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_s)$	$(28)^2\left[(94)(101) - (93)(102)\right]$	0,0357978	0,1701036
107		$(28)^2\left[(95)(103) + (96)(104)\right]$	0,2451097	0,8454243
108		$(28)^2\left[(96)(103) - (95)(104)\right]$	0,00822376	0,1105682
109		$(25)\left[(25)^2 - 3(26)^2\right]$	0,1619232	0,7439754
110		$(26)\left[3(25)^2 - (26)^2\right]$	1,2078101	1,5742437
111		$(27)\left[(27)^2 - 3(28)^2\right]$	-1,0703370	-1,5117430

Número	Expresión	Cálculo	Cantidad numérica	
			1er término	2º término
112		$(28)\left[3.(27)^2 - (28)^2\right]$	-1,4505057	-0,0199252
113		$(28)^3\left[-(93)(109) - (94)(110)\right]$	-0,2935417	-2,0481548
114	$\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)$	$(28)^3\left[-(94)(109) + (93)(110)\right]$	0,1240243	0,3053038
115		$(28)^3\left[-(95)(111) - (96)(112)\right]$	-0,1093401	-0,7854143
116		$(28)^3\left[-(96)(111) + (95)(112)\right]$	0,3498124	1,2177130
117		$(101)^2 - (102)^2$	-0,4051393	0,1059159
118		$2.(101)(102)$	1,3297772	2,070720
119		$(103)^2 - (104)^2$	1,2118894	-0,0094094
120		$2.(103)(104)$	-2,8239434	-1,9242454
121		$(28)^4\left[(93)(117) + (94)(118)\right]$	0,2409017	3,910752
122	$\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)$	$(28)^4\left[(94)(117) - (93)(118)\right]$	-0,2004873	-2,5100883
123		$(28)^4\left[(95)(119) + (96)(120)\right]$	-0,3953246	-1,8320458
124		$(28)^4\left[(96)(119) - (95)(120)\right]$	-0,2742497	-2,5507843
125		$-(25)(117) + (28)(118)$	1,1525271	0,8075947
126		$-(28)(117) - (25)(118)$	-1,0349247	-2,3531104
127		$-(27)(119) + (28)(120)$	-3,7271532	-2,8805830
128		$-(28)(119) - (27)(120)$	-0,5559947	-0,8301857
129		$(28)^5\left[(93)(125) + (94)(126)\right]$	-0,0919255	-8,0107916
130	$\frac{d^5}{d\varphi^5}(u_s)$	$(28)^5\left[(94)(125) - (93)(126)\right]$	0,4315942	8,424116
131		$(28)^5\left[(95)(127) + (96)(128)\right]$	0,5247747	3,5051775
132		$(28)^5\left[(96)(127) - (95)(128)\right]$	-0,4228439	-5,8183774

Otros valores necesarios para establecer las expresiones de los esfuerzos y recorridos son las funciones trigonométrico-exponenciales, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3.... ϕ_8, dependientes del ángulo φ y que se incluyen en los dos cuadros siguientes para los dos primeros términos de la serie de Fourier y para valores de φ de 0º, 21º, 42º, 63º, 84º, 105º y 126º.

1er término

Valores de φ

Función	0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
$\phi_1 = e^{-a\rho\varphi} \cos \rho b\varphi + e^{-a\rho\omega} \cos \rho b\omega$	0,9023709	0,601846	0,422558	0,257988	0,152081	0,094480	0,075934
$\phi_2 = e^{-a\rho\varphi} \operatorname{sen} \rho b\varphi + e^{-a\rho\omega} \operatorname{sen} \rho b\omega$	0,0072318	0,147526	0,201501	0,211736	0,204257	0,194523	0,190488
$\phi_3 = e^{-c\rho\varphi} \cos \rho d\varphi + e^{-c\rho\omega} \cos \rho d\omega$	1,1050311	0,804043	0,483536	-0,015841	-0,430650	-0,727400	-0,828740
$\phi_4 = e^{-c\rho\varphi} \operatorname{sen} \rho d\varphi + e^{-c\rho\omega} \operatorname{sen} \rho d\omega$	-0,057648	0,240816	0,391064	0,383940	0,295180	0,201797	0,163282
$\phi_5 = e^{-a\rho\varphi} \cos \rho b\varphi - e^{-a\rho\omega} \cos \rho b\omega$	1,0070201	0,679540	0,440069	0,272096	0,154371	0,089200	0
$\phi_6 = e^{-a\rho\varphi} \operatorname{sen} \rho b\varphi - e^{-a\rho\omega} \operatorname{sen} \rho b\omega$	-0,0072318	0,122400	0,163403	0,147606	0,108297	0,059543	0
$\phi_7 = e^{-c\rho\varphi} \cos \rho d\varphi - e^{-c\rho\omega} \cos \rho d\omega$	0,8340999	0,832511	0,309092	0,146046	0,007452	-0,027542	0
$\phi_8 = e^{-c\rho\varphi} \operatorname{sen} \rho d\varphi - e^{-c\rho\omega} \operatorname{sen} \rho d\omega$	0,057048	0,937280	0,857084	0,900048	0,744308	0,415573	0

Siendo $\omega = 2\phi_k - \varphi = 252 - \varphi$

2° término

Valores de φ

Función	0°	21°	42°	63°	84°	105°	120°
$\phi_1 = e^{-a\rho\varphi}\cos\rho b\varphi + e^{-a\rho\omega}\cos\rho b\omega$	0,9990153	0,4400210	0,1700231	0,0522297	0,0151977	-0,0013071	-0,0091526
$\phi_2 = e^{-a\rho\varphi}\operatorname{sen}\rho b\varphi + e^{-a\rho\omega}\operatorname{sen}\rho b\omega$	-0,0005203	0,1300595	0,1250295	0,0015171	0,0400154	0,0207523	0,020504
$\phi_3 = e^{-c\rho\varphi}\cos\rho d\varphi + e^{-c\rho\omega}\cos\rho d\omega$	0,9998007	0,5340205	-0,0702045	-0,1812085	-0,207737	-0,1328224	-0,080280
$\phi_4 = e^{-c\rho\varphi}\operatorname{sen}\rho d\varphi + e^{-c\rho\omega}\operatorname{sen}\rho d\omega$	0,0131327	0,526240	0,5900005	0,3401008	0,0227502	-0,2174751	-0,304400
$\phi_5 = e^{-a\rho\varphi}\cos\rho b\varphi - e^{-a\rho\omega}\cos\rho b\omega$	1,0000947	0,4473604	0,1800340	0,0042379	0,0180860	0,0030015	0
$\phi_6 = e^{-a\rho\varphi}\operatorname{sen}\rho b\varphi - e^{-a\rho\omega}\operatorname{sen}\rho b\omega$	0,0005203	0,1307575	0,1240746	0,0000395	0,0435500	0,0183037	0
$\phi_7 = e^{-c\rho\varphi}\cos\rho d\varphi - e^{-c\rho\omega}\cos\rho d\omega$	1,0213033	0,5527005	0,0291085	-0,2064055	-0,307375	-0,2347753	0
$\phi_8 = e^{-c\rho\varphi}\operatorname{sen}\rho d\varphi - e^{-c\rho\omega}\operatorname{sen}\rho d\omega$	-0,0131327	0,482021	0,4870005	0,2044092	0,0843522	-0,0033071	0

Partiendo de los valores hallados anteriormente las expresiones de los esfuerzos y recorridos del estado homogéneo serán:

$$N_{x_s} = -\frac{Et\cdot\lambda}{r}\Big\{\big[(61)B_1 + (62)B_2\big]\phi_1 + \big[(61)B_2 - (62)B_1\big]\phi_2 + \big[(63)B_3 + (64)B_4\big]\phi_3 + \big[(63)B_4 - (64)B_3\big]\phi_4\Big\} \operatorname{sen}\frac{n\varphi x}{l}$$

$$N_{\varphi_s} = -\frac{Et\lambda^2}{4r}\Big\{\big[(65)B_1 + (66)B_2\big]\phi_1 + \big[(65)B_2 - (66)B_1\big]\phi_2 + \big[(67)B_3 + (68)B_4\big]\phi_3 + \big[(67)B_4 - (68)B_3\big]\phi_4\Big\} \operatorname{sen}\frac{n\varphi x}{l}$$

$$N_{\varphi x_s} = -\frac{Et\lambda\sqrt{\lambda}}{r}\Big\{\big[(69)B_1 + (70)B_2\big]\phi_5 + \big[(69)B_2 - (70)B_1\big]\phi_6 + \big[(71)B_3 + (72)B_4\big]\phi_7 + \big[(71)B_4 - (72)B_3\big]\phi_8\Big\} \cos\frac{n\varphi x}{l}$$

$$M_{\varphi_s} = \frac{Et\lambda^3}{4\alpha^2}\Big\{\big[(73)B_1 + (74)B_2\big]\phi_1 + \big[(73)B_2 - (74)B_1\big]\phi_2 + \big[(75)B_3 + (76)B_4\big]\phi_3 + \big[(75)B_4 - (76)B_3\big]\phi_4\Big\} \operatorname{sen}\frac{n\varphi x}{l}$$

$$M_{t_s} = \frac{Et\lambda^3\sqrt{\lambda}}{4\alpha^2}\Big\{\Big[(85)B_1 + (86)B_2\Big]\phi_5 + \Big[(85)B_2-(86)B_1\Big]\phi_6 +$$

$$+ \Big[(87)B_3 + (88)B_4\Big]\phi_7 + \Big[(87)B_4-(88)B_3\Big]\phi_8\Big\}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$M_{x_s} = -\,Et\,\frac{\lambda^4}{4\alpha^2}\Big[B_1\phi_1 + B_2\phi_2 + B_3\phi_3 + B_4\phi_4\Big]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$Q_{x_s} = \frac{Et\lambda^3}{4r\alpha}\Big\{\Big[(77)B_1 + (78)B_2\Big]\phi_1 + \Big[(77)B_2 - (78)B_1\Big]\phi_2 +$$

$$+ \Big[(79)B_3 + (80)B_4\Big]\phi_3 + \Big[(79)B_4-(80)B_3\Big]\phi_4\Big\}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$Q_{\varphi_s} = \frac{Et\lambda^2\sqrt{\lambda}}{4\alpha r}\Big\{\Big[(81)B_1 + (82)B_2\Big]\phi_5 + \Big[(81)B_2-(82)B_1\Big]\phi_6 +$$

$$+ \Big[(83)B_3 + (84)B_4\Big]\phi_7 + \Big[(83)B_4-(84)B_3\Big]\phi_8\Big\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$R_{\phi_s} = \frac{Et\lambda^2\sqrt{\lambda}}{4\alpha^2}\Big\{\Big[(89)B_1 + (90)B_2\Big]\phi_5 + \Big[(89)B_2-(90)B_1\Big]\phi_6 +$$

$$+ \Big[(91)B_3 + (92)B_4\Big]\phi_7 + \Big[(91)B_4 - (92)B_3\Big]\phi_8\Big\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$w_s = \Big[B_1\phi_1 + B_2\phi_2 + B_3\phi_3 + B_4\phi_4\Big]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$v_s = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\Big\{\Big[(57)B_1 + (58)B_2\Big]\phi_5 + \Big[(57)B_2 - (58)B_1\Big]\phi_6 +$$

$$+ \Big[(59)B_3 + (60)B_4\Big]\phi_7 + \Big[(59)B_4-(60)B_3\Big]\phi_8\Big\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$u_s = \frac{\lambda}{\alpha}\Big\{\Big[(61)B_1 + (62)B_2\Big]\phi_1 + \Big[(61)B_2 - (62)B_1\Big]\phi_2 +$$

$$+\Big[(63)B_3 + (64)B_4\Big]\phi_3 + \Big[(63)B_4 - (64)B_3\Big]\phi_4\Big\}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(u_s)_{x=0} = \Big[(97)B_1 + (98)B_2\Big]\phi_5 + \Big[(97)B_2 - (98)B_1\Big]\phi_6 +$$

$$+\Big[(99)B_3 + (100)B_4\Big]\phi_7 + \Big[(99)B_4 - (100)B_3\Big]\phi_8$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_s)_{x=0} = \Big[(105)B_1 + (106)B_2\Big]\phi_1 + \Big[(105)B_2 - (106)B_1\Big]\phi_2 +$$

$$+\Big[(107)B_3 + (108)B_4\Big]\phi_3 + \Big[(107)B_4 - (108)B_3\Big]\phi_4$$

$$\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} = \Big[(113)B_1 + (114)B_2\Big]\phi_5 + \Big[(113)B_2 - (114)B_1\Big]\phi_6 +$$

$$+\Big[(115)B_3 + (116)B_4\Big]\phi_7 + \Big[(115)B_4 - (116)B_3\Big]\phi_8$$

$$\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)_{x=0} = \Big[(121)B_1 + (122)B_2\Big]\phi_1 + \Big[(121)B_2 - (122)B_1\Big]\phi_2 +$$

$$+\Big[(123)B_3 + (124)B_4\Big]\phi_3 + \Big[(123)B_4 - (124)B_3\Big]\phi_4$$

$$\frac{d^5}{d\varphi^5}(u_s)_{x=0} = \Big[(129)B_1 + (130)B_2\Big]\phi_5 + \Big[(129)B_2 - (130)B_1\Big]\phi_6 +$$

$$+\Big[(131)B_3 + (132)B_4\Big]\phi_7 + \Big[(131)B_4 - (132)B_3\Big]\phi_8$$

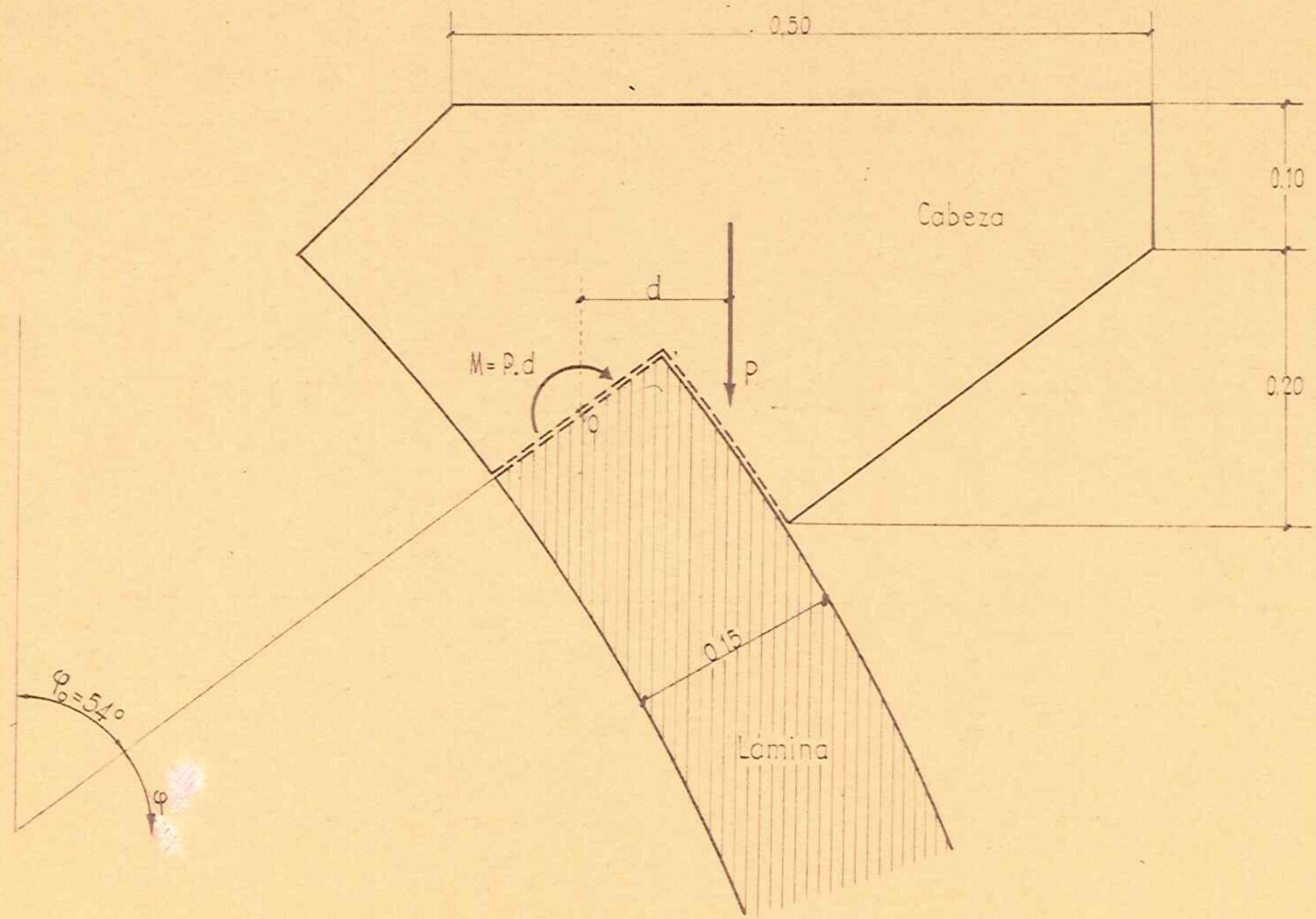

Fig. 2

En las expresiones anteriores B_1, B_2, B_3 y B_4 son las constantes de integración que se determinarán con las condiciones de sustentación y esfuerzos en los bordes longitudinales φ = const. En realidad las constantes deberían ser ocho, pero en este caso se han reducido a cuatro, ya que la lámina en estudio tiene simetría de forma y de cargas - respecto al plano vertical $\varphi = 126º$.

Tanto en los cuadros de las páginas anteriores como en las expresiones IV, los números encerrados entre paréntesis indican los valores numéricos de las expresiones que tienen este número de orden en los cuadros citados.

<u>Planteamiento de las ecuaciones de borde.</u>

En el borde longitudinal $\varphi = 0$, la lámina termina en un ensanchamiento de la forma que se indica - en la fig. 2. Esta cabeza considerada como viga independiente no coarta, al unirse a la lámina, ni el corrimiento vertical ni el horizontal, pues su esbeltez según estas dos direcciones es muy grande, por lo cual se puede considerar con suficiente aproximación que los corrimientos vertical y horizontal que tome la cuba en los bordes $\varphi = 0$ serán los que correspondan al estado lámina. No se puede decir lo mismo en lo que respecta al corrimiento longitudinal <u>u</u> , ya que éste sí viene influído en una proporción muy importante por la cabeza citada.

De lo anterior se desprende que en la unión de la lámina con la cabeza los esfuerzos cortantes que actúan en el plano de unión deben ser los mismos, así como el corrimiento longitudinal.

Sea Ω_v el área en m^2 de la sección transversal de la cabeza, S_v el esfuerzo cortante en la lámina en su unión con la cabeza, $-S_v$ será el esfuerzo cortante en la cabeza en su unión con la lámina.

Para conseguir igualdad de corrimientos en la viga y en la lámina, la ley de esfuerzos cortantes en la cabeza debe ser de la forma:

$$-S_v \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Si se supone como ya se ha indicado anteriormente, que los efectos de la flexión en la cabeza son despreciables al tener poca rigidez para esta solicitación, el esfuerzo normal en una sección $\underline{x}$ de la cabeza será:

$$T = \int - S_v \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = k_1 - S_v \cdot \frac{l}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial u_v}{\partial x} = \varepsilon_v = \frac{T}{\Omega_v} \; \frac{1}{E} = \frac{k_1}{E\Omega_v} - \frac{S_v}{E\Omega_v} \cdot \frac{l}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \, .$$

integrando esta expresión se tiene:

$$u_v = \frac{k_1}{E\Omega_v} + \frac{S_v}{E\Omega_v} \; \frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{l} + k_2$$

Las constantes de integración k_1 y k_2 se determinarán con las condiciones de que en los dos apoyos frontales ($x = 0$ y $x = l$) el corrimiento longitudinal sea nulo, es decir, $u_v = 0$

$$x = 0 \quad u_v = 0 \quad k_2 = - \frac{S_v}{E\Omega_v} \; \frac{l^2}{n^2\pi^2}$$

$$x = l \quad u_v = 0 \quad k_1 = 2 \, S_v \cdot \frac{l}{n^2\pi^2}$$

y sustituyendo en la expresión de u_v se tiene:

$$u_v = \frac{Sv}{E\Omega_v} \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left[2\frac{x}{l} + \cos\frac{n\pi x}{l} - 1 \right]$$

Este corrimiento de la cabeza debe ser el mismo que el de la lámina, es decir:

$$u_v = (u_{\text{lamina}})_{\varphi=0}$$

$$\frac{S_v}{E\Omega_v} \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left[2\frac{x}{l} + \cos\frac{n\pi x}{l} - 1 \right] = (u_m)_{\varphi=0} +$$

$$+ (u_s)_{\substack{x=0\\ \varphi=0}} \left[2\frac{x}{l} + \cos\frac{n\pi x}{l} - 1 \right]$$

De la expresión anterior se obtiene el valor de Sv para acueducto lleno y acueducto vacío.

Acueducto lleno:

$$S_v = \frac{\Omega_v}{t} \frac{41}{rn^2\pi^2} (1.000\ r + 720) \cos\varphi_o +$$

$$+ \frac{E\Omega_v}{l^2}\ n^2\pi^2\ (u_s)_{\substack{x=0\\ \varphi=0}}$$

Acueducto vacío:

$$S_v = \frac{\Omega v}{t} \; \frac{41}{rn^2\pi^2} \, 720 \cos\varphi_o + \frac{E\Omega v}{1^2} n^2\pi^2 \, (u_s)_{\substack{x=0\\ \varphi=0}}$$

El esfuerzo en la viga de cabeza, en una sección x será:

$$T = S_v \cdot \frac{1}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi} - \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{1}\right]$$

La primera condición de borde será, por lo tanto, que el esfuerzo cortante $N_{\varphi x}$ de la lámina para $\varphi = 0$ debe ser igual al esfuerzo S_v de la cabeza, es decir:

$$\left[N_{\varphi x} + (N_{\varphi x})_m\right]_{\varphi = 0} = S_v \cos\frac{n\pi x}{1} \qquad \text{(V)}$$

La segunda condición será que el esfuerzo vertical debe ser nulo. Siendo P el peso de la cabeza la expresión de esta condición será:

$$\left[N\varphi \operatorname{sen}\varphi_o + (N_\varphi)_m \operatorname{sen}\varphi_o + R_\varnothing \cos\varphi_o\right]_{\varphi = 0} =$$

$$= \frac{-4}{n\pi} P \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{1} \qquad \text{(VI)}$$

La tercera condición que se impone es la de corrimiento horizontal nulo, cuya expresión es la siguiente:

$$\left[w \operatorname{sen}\varphi_0 + (w)_m \operatorname{sen}\varphi_0 + v \cos\varphi_0 - (v)_m \cos\varphi_0\right]_{\varphi=0} = 0 \qquad \text{(VII)}$$

Y por último la cuarta condición es que el momento flector transversal debe ser igual al que produce la excentricidad de la cabeza respecto al punto 0 de la lámina (fig. 2).

$$\left[M_\varphi\right]_{\varphi=0} = P \cdot d \cdot \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \qquad \text{(VIII)}$$

En todo lo anterior y en lo que sigue, cuando (como en las ecuaciones III) aparecen algunos valores en función de x sin desarrollar en serie de Fourier se toma el desarrollo para lo cual se utilizan las siguientes expresiones:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l} + \dots\right] =$$

$$= \sum_{1,3,5..} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$1 - \frac{2x}{l} = \frac{8}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{l} + \ldots\right] =$$

$$= \sum_{1,3,5\ldots} \frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{8}{\pi^3}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{27}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{125}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l} + \ldots\right] =$$

$$= \sum_{1,3,5\ldots} \frac{8}{n^3\pi^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

<u>Determinación de las constantes B</u>

Sustituyendo valores en el sistema formado por las cuatro ecuaciones (V), (VI), (VII) y (VIII) se obtienen los sistemas siguientes:

1º.- Acueducto lleno.- 1$^{\underline{er}}$ término

$$-B_1 - 4{,}5016663\ B_2 + 1{,}9412452\ B_3 + 0{,}24767940\ B_4 =$$

$$= -615.985{,}47\ \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 + 28{,}989735\ B_2 + 0{,}21354978\ B_3 - 29{,}635708 B_4 =$$

$$= -\ 114.746{,}79\ \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 + 0,18873932B_2 + 0,80809320B_3 + 0,23188258B_4 =$$

$$= 72,35613 \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 - 1,6252391B_2 - 1,2592449B_3 - 1,4039807B_4 =$$

$$= 44.097,740 \frac{4r}{Et}$$

Sistema que tiene como solución:

$$B_1 = 79.613,1 \cdot \frac{4r}{Et}$$

$$B_2 = 65.345,2 \frac{4r}{Et} \qquad \text{(IX)}$$

$$B_3 = -133.639,9 \frac{4r}{Et}$$

$$B_4 = 69.516,2 \frac{4r}{Et}$$

2º.- Acueducto lleno.- 2º término

$$-B_1-2,1039360B_2 + 1,4603853B_3 - 0,07386352B_4 =$$

$$= -5.833,0947 \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 - 17,809972B_2 - 4,3927594B_3 +14,906660B_4 =$$

$$= 2,298,7153 \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 + 0{,}08891979B_2 + 0{,}84937113B_3 + 0{,}25080409B_4 =$$

$$= 28{,}653012 \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 - 0{,}78346657B_2 - 0{,}53079502B_3 - 0{,}75441448B_4 =$$

$$= 654{,}7051 \frac{4r}{Et}$$

Cuya solución es:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 1.166{,}0 \frac{4r}{Et} \\ B_2 &= 1021{,}8 \frac{4r}{Et} \\ B_3 &= 1.683{,}0 \frac{4r}{Et} \\ B_4 &= 800{,}9 \frac{4r}{Et} \end{aligned}\right. \qquad (X)$$

3º.- Acueducto vacío.- 1er término

$$-B_1 - 4{,}5016663B_2 + 1{,}9412452B_3 + 0{,}24767940B_4 =$$

$$= - 185.957{,}87 \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 + 28{,}989735B_2 + 0{,}21354978B_3 - 29{,}635708B_4 =$$

$$= - 114.746{,}79 \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 + 0{,}18873932B_2 + 0{,}80809320B_3 + 0{,}23188258B_4 =$$

$$= 72{,}35613 \ \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 - 1{,}6252391B_2 - 1{,}2592449B_3 - 1{,}4039807B_4 =$$

$$= 44.097{,}74 \ \frac{4r}{Et}$$

Sistema que tiene como solución:

$$B_1 = 32.260{,}4 \ \frac{4r}{Et}$$

$$B_2 = 14.254{,}7 \ \frac{4r}{Et} \qquad \text{(XI)}$$

$$B_3 = -48.485{,}9 \ \frac{4r}{Et}$$

$$B_4 = 18.555{,}1 \ \frac{4r}{Et}$$

4º.- Acueducto vacío.- 2º término

$$-B_1 - 2{,}1039360B_2 + 1{,}4603853B_3 - 0{,}07386352B_4 =$$

$$= - 1.760{,}9340 \ \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 - 17{,}809972B_2 - 4{,}3927594B_3 + 14{,}906660B_4 =$$

$$= 2.298{,}7153 \ \frac{4r}{Et}$$

$$B_1 + 0{,}08891979B_2 + 0{,}84937113B_3 + 0{,}25080409B_4 =$$
$$= 28{,}6530\,\frac{4r}{Et}$$

$$B_1 - 0{,}78346657B_2 - 0{,}53079502B_3 - 0{,}75441448B_4 =$$
$$= 654{,}7051\,\frac{4r}{Et}$$

Cuya solución es:

$$B_1 = 521{,}51\,\frac{4r}{Et}$$
$$B_2 = 148{,}68\,\frac{4r}{Et} \qquad \text{(XII)}$$
$$B_3 = 628{,}82\,\frac{4r}{Et}$$
$$B_4 = 111{,}55\,\frac{4r}{Et}$$

Esfuerzos del estado homogéneo.

Sustituyendo los valores de las B halladas anteriormente en las expresiones (IV) y efectuando operaciones se tiene:

1º.- Acueducto lleno.- 1er término

$$
\left.\begin{array}{l}
N_{x_s} = \left[-20.381\phi_1 + 7.715\phi_2 - 19.922\,\phi_3 - \right. \\
\qquad \left. - 1.038\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \\
N_{\varphi s} = \left[505\phi_1 - 565\phi_2 - 461\phi_3 - 927\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \\
N_{\varphi x_s} = \left[-3.241\phi_5 + 3643\phi_6 - 1.234\phi_7 + 3.527\phi_8\right] \cos \frac{\pi x}{l} \\
M_{x_s} = \left[-25\phi_1 - 20\phi_2 + 41\phi_3 - 21\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \\
M_{\varphi s} = \left[307\phi_1 + 927\phi_2 + 58\phi_3 - 832\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \\
M_{t_s} = \left[-157\phi_5 - 152\phi_6 + 147\phi_7 + 54\phi_8\right] \cos \frac{\pi x}{l} \\
Q_{x_s} = \left[44\phi_1 + 142\phi_2 + 16\phi_3 - 134\phi_4\right] \cos \frac{\pi x}{l} \\
Q_{\varphi_s} = \left[144\phi_5 - 632\phi_6 - 734\phi_7 + 113\phi_8\right] \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \\
u_s = \left[19.482\phi_1 - 7.374\phi_2 + 19.043\phi_3 + 992\phi_4\right] \frac{4r}{Et} \cos \frac{\pi x}{l} \\
\frac{d}{d\varphi}(u_s)_{x=0} = \left[-24.172\phi_5 - 2.918\phi_6 - 6.135\phi_7 - 25.909\phi_8\right] \frac{4r}{Et} \\
\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_s)_{x=0} = \left[23.454\phi_1 + 16.118\phi_2 - 32.317\phi_3 + 18.377\phi_4\right] \frac{4r}{Et} \\
\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} = \left[-15.558\phi_5 - 29.401\phi_6 + 37.295\phi_7 + 36.105\phi_8\right] \frac{4r}{Et}
\end{array}\right\} \text{(XIII)}
$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)_{x=0} &= \left[184\phi_1 + 38.879\phi_2 + 33.766\phi_3 - 64.132\phi_4\right]\frac{4r}{Et}\\ \frac{d^5}{d\varphi^5}(u_s)_{x=0} &= \left[20.874\phi_5 - 40.366\phi_6 - 99.179\phi_7 - 20.114\phi_8\right]\frac{4r}{Et}\end{aligned}\right\}(XIII)$$

2º.- Acueducto lleno.- 2º término

$$\left.\begin{aligned}
N_{x_s} &= \left[-894\phi_1 + 209\phi_2 - 792\phi_3 - 140\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l}\\
N_{\varphi s} &= \left[67\phi_1 - 74\phi_2 - 51\phi_3 - 107\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l}\\
N_{\varphi x_s} &= \left[-265\phi_5 + 185\phi_6 - 155\phi_7 + 243\phi_8\right] \cos \frac{3\pi x}{l}\\
M_{x_s} &= \left[-3,2\phi_1 - 2,8\phi_2 + 4,7\phi_3 - 2,2\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l}\\
M_{\varphi s} &= \left[8\phi_1 + 39\phi_2 + 6\phi_3 - 34\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l}\\
M_{t_s} &= \left[-7,8\phi_5 - 12\phi_6 + 10\phi_7 + 6,6\phi_8\right] \cos \frac{3\pi x}{l}\\
Q_{x_s} &= \left[2,4\phi_1 + 17\phi_2 + 4,9\phi_3 - 17\phi_4\right] \cos \frac{3\pi x}{l}\\
Q_{\varphi_s} &= \left[15\phi_5 - 42\phi_6 - 54\phi_7 + 2,5\phi_8\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l}\\
u_s &= \left[285\phi_1 - 67\phi_2 + 252\phi_3 + 44\phi_4\right] \frac{4r}{Et} \cos \frac{3\pi x}{l}\\
\frac{d}{d\varphi}(u_s)_{x=0} &= \left[-644\phi_5 - 98\phi_6 + 121\phi_7 - 546\phi_8\right] \frac{4r}{Et}
\end{aligned}\right\}(XIV)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_s)_{x=0} &= \left[1.252\phi_1 + 734\phi_2 - 1000\phi_3 + 704\phi_4\right]\frac{4r}{Et}\\
\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} &= \left[-1.984\phi_5 - 2.554\phi_6 + 2.258\phi_7 + 1.426\phi_8\right]\frac{4r}{Et}\\
\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)_{x=0} &= \left[1.994\phi_1 + 6.923\phi_2 + 983\phi_3 - 5.752\phi_4\right]\frac{4r}{Et}\\
\frac{d^5}{d\varphi^5}(u_s)_{x=0} &= \left[1.593\phi_5 - 15.971\phi_6 - 10.711\phi_7 - 6.912\phi_8\right]\frac{4r}{Et}
\end{aligned}\right\}\text{(XIV)}$$

3º.- Acueducto vacío.- 1er término

$$\left.\begin{aligned}
N_{x_s} &= \left[-6.016\phi_1 + 4.415\phi_2 - 6.780\phi_3 - 1.137\phi_4\right]\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\\
N_{\varphi_s} &= \left[115\phi_1 - 233\phi_2 - 122\phi_3 - 336\phi_4\right]\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\\
N_{\varphi x_s} &= \left[-735\phi_5 + 1.499\phi_6 - 561\phi_7 + 1.159\phi_8\right]\cos\frac{\pi x}{l}\\
M_{x_s} &= \left[-10\phi_1 - 4{,}4\phi_2 + 15\phi_3 - 5{,}7\phi_4\right]\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\\
M_{\varphi_s} &= \left[186\phi_1 + 278\phi_2 + 53\phi_3 - 283\phi_4\right]\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\\
M_{t_s} &= \left[-66\phi_5 - 36\phi_6 + 48\phi_7 + 24\phi_8\right]\cos\frac{\pi x}{l}\\
Q_{x_s} &= \left[28\phi_1 + 43\phi_2 + 11\phi_3 - 45\phi_4\right]\cos\frac{\pi x}{l}\\
Q_{\varphi_s} &= \left[-11\phi_5 - 222\phi_6 - 256\phi_7 + 10\phi_8\right]\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}
\end{aligned}\right\}\text{(XV)}$$

$$u_s = \left[5.751\phi_1 - 4.220\phi_2 + 6.481\phi_3 + 1.087\phi_4\right] \frac{4r}{Et} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(u_s)_{x=0} = \left[-8.243\phi_5 + 1.255\phi_6 - 1.083\phi_7 - 9.112\phi_8\right] \frac{4r}{Et}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_s)_{x=0} = \left[9.217\phi_1 + 3.166\phi_2 - 11.786\phi_3 + 5.024\phi_4\right] \frac{4r}{Et}$$

$$\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} = \left[-7.830\phi_5 - 8.272\phi_6 + 11.352\phi_7 + 13.826\phi_8\right] \frac{4r}{Et}$$

$$\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)_{x=0} = \left[3.627\phi_1 + 12.810\phi_2 + 14.079\phi_3 - 20.632\phi_4\right] \frac{4r}{Et}$$

$$\frac{d^5}{d\varphi^5}(u_s)_{x=0} = \left[3.183\phi_5 - 15.233\phi_6 - 33.168\phi_7 - 10.780\phi_8\right] \frac{4r}{Et}$$

(XV)

4º.- Acueducto vacío.- 2º término

$$N_{x_s} = \left[-251\phi_1 + 200\phi_2 - 249\phi_3 - 118\phi_4\right] \text{sen} \frac{3\pi x}{l}$$

$$N_{\varphi_s} = \left[10\phi_1 - 33\phi_2 - 7{,}3\phi_3 - 40\phi_4\right] \text{sen} \frac{3\pi x}{l}$$

$$N_{\varphi x_s} = \left[-56\phi_5 + 98\phi_6 - 74\phi_7 + 66\phi_8\right] \cos \frac{3\pi x}{l}$$

$$M_{x_s} = \left[-1{,}4\phi_1 - 0{,}4\phi_2 + 1{,}7\phi_3 - 0{,}3\phi_4\right] \text{sen} \frac{3\pi x}{l}$$

(XVI)

$$\left.\begin{aligned}
M_{\varphi s} &= \left[8\phi_1 + 11\phi_2 + 5\phi_3 - 11\phi_4\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \\
M_{t_s} &= \left[-4{,}2\phi_5 - 2{,}5\phi_6 + 2{,}8\phi_7 + 3{,}1\phi_8\right] \cos \frac{3\pi x}{l} \\
Q_{x_s} &= \left[3{,}3\phi_1 + 5{,}1\phi_2 + 3{,}2\phi_3 - 5{,}2\phi_4\right] \cos \frac{3\pi x}{l} \\
Q_{\varphi s} &= \left[-1{,}4\phi_5 - 16\phi_6 - 18\phi_7 - 4\phi_8\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \\
u_s &= \left[80\phi_1 - 64\phi_2 + 79\phi_3 + 38\phi_4\right] \frac{4r}{Et} \cos \frac{3\pi x}{l} \\
\frac{d}{d\varphi}(u_s)_{x=0} &= \left[-218\phi_5 + 66\phi_6 + 9{,}4\phi_7 - 192\phi_8\right] \frac{4r}{Et} \\
\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_s)_{x=0} &= \left[506\phi_1 + 45\phi_2 - 394\phi_3 + 142\phi_4\right] \frac{4r}{Et} \\
\frac{d^3}{d\varphi^3}(u_s)_{x=0} &= \left[-1.009\phi_5 - 511\phi_6 + 616\phi_7 + 677\phi_8\right] \frac{4r}{Et} \\
\frac{d^4}{d\varphi^4}(u_s)_{x=0} &= \left[1.666\phi_1 + 1.890\phi_2 + 848\phi_3 - 1.811\phi_4\right] \frac{4r}{Et} \\
\frac{d^5}{d\varphi^5}(u_s)_{x=0} &= \left[-1.885\phi_5 - 5.288\phi_6 - 2.910\phi_7 - 3.258\phi_8\right] \frac{4r}{Et}
\end{aligned}\right\} \text{(XVI)}$$

<u>Esfuerzos totales</u>

Sustituyendo los valores de $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_8$ hallados anteriormente, en las expresiones (XIII), (XIV), (XV) y (XVI), después de efectuar operaciones e introducir estos nuevos valores en las expresiones (III) y sumar los esfuerzos debidos al estado membrana, se tendrán los esfuerzos totales para el 1^er^ y 2º término de la serie y para distintos valores de φ y <u>x</u>. En los cuadros que se incluyen a continuación se pueden ver estos valores para los dos casos estudiados de acueducto lleno y acueducto vacío.

N_x .- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1^er^ término	55.231	31.557	5.712	-19.004	-39.373	-52.750	-57.410
	2° término	696	356	- 3	-276	-465	-572	-606
	TOTAL	55.927	31.913	5.709	-19.280	-39.838	-53.322	-58.016
0,1	1^er^ término	28.421	16.239	2.939	-9.779	-20.261	-27.145	-29.543
	2° término	-1.958	-1.000	9	776	1.308	1.610	1.706
	TOTAL	26.463	15.239	2.948	-9.003	-18.953	-25.535	-27.837
0,2	1^er^ término	4.236	2.421	438	-1.458	-3.020	-4.046	-4.403
	2° término	-2.423	-1.238	11	961	1.620	1.993	2.112
	TOTAL	1.813	1.183	449	-497	-1.400	-2.053	-2.291
0,3	1^er^ término	-14.957	-8.546	-1.547	5.146	10.662	14.285	15.547
	2° término	-318	-162	1	126	212	261	277
	TOTAL	-15.275	-8.708	-1.546	5.272	10.874	14.546	15.824
0,4	1^er^ término	-27.280	-15.587	-2.821	9.386	19.447	26.054	28.356
	2° término	2.624	1.341	-12	-1.040	-1.754	-2.158	-2.287
	TOTAL	-24.656	-14.246	-2.833	8.346	17.693	23.896	26.069
0,5	1^er^ término	-31.525	-18.013	-3.260	10.847	22.474	30.110	32.770
	2° término	3.976	2.032	-18	-1.577	-2.656	-3.269	-3.464
	TOTAL	-27.549	-15.981	-3.278	9.270	19.818	26.841	29.306

N_{φ} .- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1er término	-132	176	632	1.139	1.593	1.906	2.018
	2° término	-107	209	629	1.061	1.425	1.603	1.745
	TOTAL	-239	385	1.261	2.200	3.018	3.509	3.763
0,2	1er término	-250	334	1.202	2.167	3.031	3.625	3.838
	2° término	-126	245	740	1.248	1.676	1.954	2.051
	TOTAL	-376	579	1.942	3.415	4.707	5.579	5.889
0,3	1er término	-345	460	1.654	2.982	4.171	4.990	5.282
	2° término	-41	80	240	405	544	635	667
	TOTAL	-385	540	1.894	3.387	4.715	5.625	5.949
0,4	1er término	-405	541	1.945	3.506	4.904	5.866	6.209
	2° término	78	-152	-457	-771	-1.036	-1.208	-1.268
	TOTAL	-327	389	1.488	2.735	3.868	4.658	4.941
0,5	1er término	-426	569	2.045	3.686	5.156	6.168	6.529
	2° término	133	-258	-778	-1.312	-1.762	-2.055	-2.157
	TOTAL	-293	311	1.267	2.374	3.394	4.113	4.372

$N_{\varphi x}$.- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	11.556	18.137	20.950	19.914	15.447	8.409	0
	2° término	1.312	2.142	2.227	2.033	1.515	806	0
	TOTAL	12.868	20.279	23.177	21.947	16.962	9.215	0
0,1	1er término	10.930	17.249	19.924	18.939	14.691	7.997	0
	2° término	771	1.259	1.309	1.194	890	474	0
	TOTAL	11.701	18.508	21.233	20.133	15.581	8.471	0
0,2	1er término	9.349	14.673	16.949	16.111	12.497	6.804	0
	2° término	-405	-662	-688	-628	-468	-249	0
	TOTAL	8.944	14.011	16.261	15.483	12.029	6.555	0
0,3	1er término	6.792	10.661	12.314	11.705	9.080	4.943	0
	2° término	-1.248	-2.037	-2.118	-1.934	-1.441	-767	0
	TOTAL	5.544	8.624	10.196	9.771	7.639	4.176	0
0,4	1er término	3.571	5.605	6.474	6.154	4.773	2.599	0
	2° término	-1.061	-1.733	-1.802	-1.645	-1.226	-652	0
	TOTAL	2.510	3.872	4.672	4.509	3.547	1.947	0
0,5	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0

M_φ .- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1^er^ término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1^er^ término	11	-2	-11	-14	-14	-11	-11
	2° término	10	-5	-11	-8	0	5	7
	TOTAL	21	-7	-22	-22	-14	- 6	-4
0,2	1^er^ término	22	-4	-21	-27	-26	-22	-21
	2° término	11	-6	-12	-10	0	6	9
	TOTAL	33	- 10	-33	-37	-26	-16	-12
0,3	1^er^ término	30	-6	-28	-37	-36	-30	-28
	2° término	4	-2	-4	-3	0	2	3
	TOTAL	34	-8	-32	-40	-36	-28	-25
0,4	1^er^ término	35	-7	-33	-44	-41	-35	-33
	2° término	-7	4	8	6	0	-4	-5
	TOTAL	28	-3	-25	-38	-41	-39	-38
0,5	1^er^ término	37	-7	-35	-46	-44	-37	-35
	2° término	-12	6	13	10	0	-6	-9
	TOTAL	25	-1	-22	-36	-44	-43	-44

M_x .- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1er término	-2	-3	-4	-2	1	6	10
	2° término	2	1	-2	-2	-1	-1	1
	TOTAL	0	-2	-6	-4	0	5	11
0,2	1er término	-4	-6	-7	-4	2	11	19
	2° término	2	1	-2	-2	-1	-1	1
	TOTAL	-2	-5	-9	-6	1	10	20
0,3	1er término	-6	-8	-10	-6	3	15	27
	2° término	1	0	-1	-1	0	0	0
	TOTAL	-5	-8	-11	-7	3	15	27
0,4	1er término	-7	-10	-11	-7	4	17	31
	2° término	-1	-1	1	1	1	1	-1
	TOTAL	-8	-11	-10	-6	5	18	30
0,5	1er término	-7	-10	-12	-7	4	18	33
	2° término	-2	-1	2	2	1	1	-1
	TOTAL	-9	-11	-10	-5	5	19	32

M_t .- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0º	21º	42º	63º	84º	105º	120º
0	1er término	18	18	16	12	8	2	0
	2º término	2	4	0	-3	-4	-2	0
	TOTAL	20	22	16	9	4	0	0
0,1	1er término	17	17	15	11	8	2	0
	2º término	1	2	0	-2	-2	-1	0
	TOTAL	18	19	15	9	6	1	0
0,2	1er término	15	15	13	10	6	2	0
	2º término	-1	-1	0	1	1	1	0
	TOTAL	14	14	13	11	7	3	0
0,3	1er término	11	11	9	7	5	1	0
	2º término	-2	-4	0	3	4	2	0
	TOTAL	9	7	9	10	9	3	0
0,4	1er término	6	6	5	4	2	1	0
	2º término	-2	-3	0	2	3	2	0
	TOTAL	4	3	5	6	5	3	0
0,5	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2º término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0

Q_{φ} .- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1er término	-27	-28	-19	-9	-2	0	0
	2° término	-30	-20	-1	12	14	9	0
	TOTAL	-57	-48	-20	3	12	9	0
0,2	1er término	-51	-53	-36	-18	-4	1	0
	2° término	-35	-24	-1	14	16	10	0
	TOTAL	-86	-77	-37	-4	12	11	0
0,3	1er término	-70	-73	-50	-24	-6	1	0
	2° término	-11	-8	0	5	5	3	0
	TOTAL	-81	-81	-50	-19	-1	4	0
0,4	1er término	-83	-86	-59	-29	-7	1	0
	2° término	22	15	1	-9	-10	-6	0
	TOTAL	-61	-71	-58	-38	-17	-5	0
0,5	1er término	-87	-90	-62	-30	-7	1	0
	2° término	37	25	1	-15	-17	-11	0
	TOTAL	-50	-65	-61	-45	-24	-10	0

Q_x .- ACUEDUCTO LLENO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	11	1	-5	-10	-13	-13	-13
	2° término	6	-3	-8	-6	0	3	5
	TOTAL	17	-2	-13	-16	-13	-10	-8
0,1	1er término	10	1	-5	-10	-12	-12	-12
	2° término	4	-2	-5	-4	0	2	3
	TOTAL	14	-1	-10	-14	-12	-10	-9
0,2	1er término	9	1	-4	-8	-11	-11	-11
	2° término	-2	1	2	2	0	-1	-2
	TOTAL	7	2	-2	-6	-11	-12	-13
0,3	1er término	6	1	-3	-6	-8	-8	-8
	2° término	-6	3	8	6	0	-3	-5
	TOTAL	0	4	5	0	-8	-11	-13
0,4	1er término	3	0	-2	-3	-4	-4	-4
	2° término	-5	2	6	5	0	-2	-4
	TOTAL	-2	2	4	2	-4	-6	-8
0,5	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0

Esfuerzo en la cabeza (en Kg.)

	x/l					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1er término	46.834	24.100	3.592	-12.683	-23.132	-26.783
2º término	591	-1.662	-2.057	-269	2.227	3.375
TOTAL	47.425	22.438	1.435	-12.952	-20.905	-23.408

N_x .- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	17.110	9.841	1.851	-754	-12.230	-16.440	-17.909
	2° término	209	105	4	-81	-142	-177	-188
	TOTAL	17.319	9.946	1.855	-835	-12.372	-16.617	-18.097
0,1	1er término	8.805	5.064	953	-388	-6.294	-8.400	-9.216
	2° término	-586	-294	-11	227	399	409	529
	TOTAL	8.219	4.770	942	-161	-5.895	- 7.991	-8.687
0,2	1er término	1.312	755	142	-58	-938	-1.261	-1.374
	2° término	-726	-364	-14	281	494	618	655
	TOTAL	586	391	128	223	-444	-643	-719
0,3	1er término	-4.633	-2.665	-501	204	3.312	445	4.850
	2° término	-95	-48	-2	37	65	81	86
	TOTAL	-4.728	-2.713	-503	241	3.377	526	4.936
0,4	1er término	-8.451	-4.861	-914	372	6.041	8.120	8.846
	2° término	766	394	15	-304	-534	-669	-710
	TOTAL	-7.685	-4.467	-899	68	5.507	7.451	8.136
0,5	1er término	-9.766	-5.617	-1.057	430	6.981	9.384	10.223
	2° término	1.192	598	23	-461	-810	-1.013	-1.075
	TOTAL	-8.574	-5.019	-1.034	-31	6.171	8.371	9.148

N_φ .- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1er término	-141	-108	-33	62	152	216	239
	2° término	-120	-74	1	81	152	200	215
	TOTAL	-261	-182	-32	143	304	416	454
0,2	1er término	-267	-205	-63	118	289	411	455
	2° término	-141	-87	1	95	179	235	253
	TOTAL	-408	-292	-62	213	468	646	708
0,3	1er término	-368	-282	-87	162	398	566	626
	2° término	-45	-28	0	31	58	76	82
	TOTAL	-413	-310	-87	193	456	642	708
0,4	1er término	-433	-332	-102	190	468	665	736
	2° término	87	54	-1	-59	-111	-145	-156
	TOTAL	-346	-278	-103	131	357	520	580
0,5	1er término	-455	-349	-107	200	492	699	774
	2° término	148	92	-1	-100	-188	-247	-266
	TOTAL	-307	-257	-108	100	304	452	508

N $_{\varphi x}$.- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	3.601	5.624	6.508	6.196	4.813	2.622	0
	2° término	392	605	674	623	470	252	0
	TOTAL	3.993	6.229	7.186	6.819	5.283	2.874	0
0,1	1er término	3.425	5.349	6.189	5.893	4.577	2.494	0
	2° término	230	356	399	366	276	148	0
	TOTAL	3.655	5.705	6.588	6.259	4.853	2.642	0
0,2	1er término	2.913	4.550	5.265	5.013	3.894	2.121	0
	2° término	-121	-187	-210	-192	-145	-78	0
	TOTAL	2.792	4.363	5.055	4.821	3.740	2.043	0
0,3	1er término	2.117	3.306	3.825	3.642	2.829	1.541	0
	2° término	-372	-575	-645	-593	-447	-240	0
	TOTAL	1.745	2.731	3.180	3.049	2.382	1.301	0
0,4	1er término	1.113	1.738	2.011	1.915	1.487	810	0
	2° término	-317	-489	-549	-504	-380	-204	0
	TOTAL	796	1.249	1.462	1.411	1.107	606	0
0,5	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0

N_{φ} .- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2º término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1er término	11	5	0	-4	-5	-5	-5
	2º término	10	2	-3	-3	0	1	2
	TOTAL	21	7	-3	-7	-5	-4	-3
0,2	1er término	22	9	-1	-7	-10	-10	-10
	2º término	11	3	-4	-4	0	1	3
	TOTAL	33	12	-5	-11	-10	-9	-7
0,3	1er término	30	12	-1	-10	-14	-14	-14
	2º término	4	1	-1	-1	0	0	1
	TOTAL	34	13	-2	-11	-14	-14	-13
0,4	1er término	35	14	-1	-11	-16	-16	-16
	2º término	-7	-2	2	2	0	-1	-2
	TOTAL	28	12	1	-9	-16	-17	-18
0,5	1er término	37	15	-1	-12	-17	-17	-17
	2º término	-12	-3	4	4	0	-1	-3
	TOTAL	25	12	3	-8	-17	-18	-20

B_x .- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1er término	1	0	0	0	-1	-1	-1
	2° término	1	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	2	0	0	0	-1	-1	-1
0,2	1er término	1	1	1	-1	-2	-2	-2
	2° término	1	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	2	1	1	-1	-2	-2	-2
0,3	1er término	2	1	1	-1	-2	-2	-3
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	2	1	1	-1	-2	-2	-3
0,4	1er término	2	1	1	-1	-3	-3	-4
	2° término	-1	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	1	1	1	-1	-3	-3	-4
0,5	1er término	2	1	1	-1	-3	-3	-4
	2° término	-1	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	1	1	1	-1	-3	-3	-4

N_t .- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1^er^ término	1	5	5	5	3	1	0
	2° término	-1	1	1	0	-1	-1	0
	TOTAL	0	6	6	5	2	0	0
0,1	1^er^ término	1	5	5	5	3	1	0
	2° término	-1	1	1	0	-1	-1	0
	TOTAL	0	6	6	5	2	0	0
0,2	1^er^ término	1	4	4	4	2	1	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	1	4	4	4	2	1	0
0,3	1^er^ término	1	3	3	3	2	1	0
	2° término	1	-1	-1	0	1	1	0
	TOTAL	2	2	2	3	3	2	0
0,4	1^er^ término	0	2	2	2	1	0	0
	2° término	1	-1	-1	0	1	1	0
	TOTAL	1	1	1	2	2	1	0
0,5	1^er^ término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0

Q_φ.- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1er término	-12	-12	-10	-6	-3	-2	0
	2° término	-17	-13	-5	2	5	3	0
	TOTAL	- 29	-25	-15	-4	2	1	0
0,2	1er término	-22	-23	-19	-12	-6	-3	0
	2° término	-20	-15	-6	3	6	4	0
	TOTAL	-42	-38	-25	-9	0	1	0
0,3	1er término	-31	-32	-27	-17	-9	-4	0
	2° término	-6	-5	-2	1	2	1	0
	TOTAL	-37	-37	-29	-16	-7	-3	0
0,4	1er término	-36	-37	-31	-20	-10	-5	0
	2° término	12	9	4	-2	-4	-2	0
	TOTAL	-24	-28	-27	-22	-14	-7	0
0,5	1er término	-38	-39	-33	-21	-11	-5	0
	2° término	21	16	6	- 3	-6	-4	0
	TOTAL	-17	-23	- 27	-24	-17	-9	0

Q_x .- ACUEDUCTO VACIO

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	1er término	8	4	0	-2	-4	-5	-5
	2° término	5	7	5	1	-1	1	2
	TOTAL	13	11	5	-1	-5	-4	-3
0,1	1er término	8	4	0	-2	-4	-5	-5
	2° término	3	4	3	1	-1	1	1
	TOTAL	11	8	3	-1	-5	-4	-4
0,2	1er término	6	3	0	-2	-3	-4	-4
	2° término	-2	-2	-2	0	0	0	-1
	TOTAL	4	1	-2	-2	-3	-4	-5
0,3	1er término	5	2	0	-1	-2	-3	-3
	2° término	-5	-7	-5	-1	1	-1	-2
	TOTAL	0	-5	-5	-2	-1	-4	-5
0,4	1er término	2	1	0	-1	-1	-2	-2
	2° término	-4	-6	-4	-1	1	-1	-2
	TOTAL	-2	-5	-4	-2	0	-3	-4
0,5	1er término	0	0	0	0	0	0	0
	2° término	0	0	0	0	0	0	0
	TOTAL	0	0	0	0	0	0	0

Esfuerzo en la cabeza (en Kg.)

	x/l					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1.er término	14.595	7.510	1.110	-3.952	-7.209	-8.330
2º término	177	-497	-606	-81	666	1.009
TOTAL	14.772	7.013	513	-4.033	-6.543	-7.321

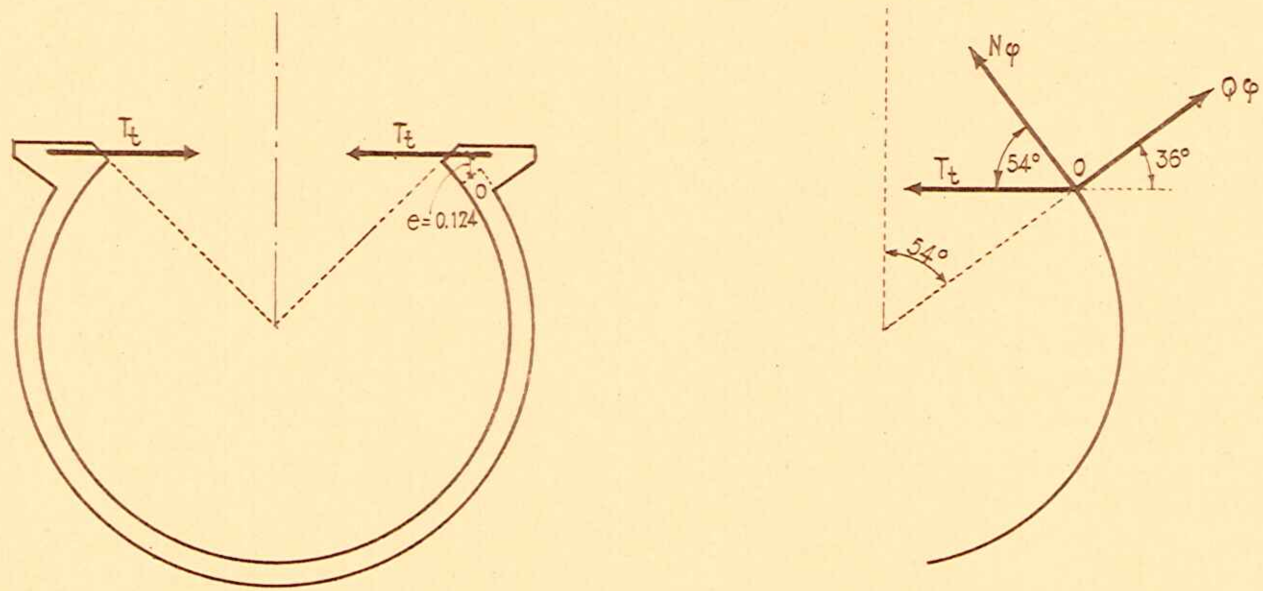

Fig. 3

Esfuerzos en los tensores que unen las dos cabezas de la cuba.

En el cálculo expuesto en las páginas anteriores, se ha impuesto la condición de que los bordes longitudinales de la lámina no tienen corrimiento horizontal; para que esto se cumpla es necesario aplicar, mediante unos tensores o separadores, unos esfuerzos horizontales T_t, que deben ser los precisos para producir en los bordes citados los esfuerzos obtenidos anteriormente en el cálculo laminar.

La expresión de estos esfuerzos T_t se puede obtener facilmente (véase fig. 3) y es la siguiente:

$$T_t = N\varphi \cdot \cos 54^{\circ} - Q\varphi \cdot \operatorname{sen} 54^{\circ}$$

Siendo positivo cuando este esfuerzo tiende a unir las cabezas y negativo cuando tiende a separarlas.

Si se utiliza la expresión anterior, siendo $N\varphi$ y $Q\varphi$ los valores hallados en el cálculo laminar para $\varphi = 0$ se tienen los valores del esfuerzo T_t para acueducto vacío y acueducto lleno.

	$\frac{x}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
T_t	Acueducto vacío	0	-130	-205	-190	-184	-168
	Acueducto lleno	0	-94	-115	-160	-143	-132

Estos valores acusan las ondas correspondientes al desarrollo en serie de Fourier limitado en los dos primeros términos. Si se estima la influencia del 3º y 4º término de la serie, se llegaría a una ley más uniforme y cuyos valores serían prácticamente los que se indican a continuación:

	$\frac{x}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
T_t	Acueducto vacío	0	-155	-190	-190	-190	-190	(XVII)
	Acueducto lleno	0	-115	-146	-146	-146	-146	

En lo que sigue se tomarán estos últimos valores.

Con objeto de dar una compresión en toda la cara interior de la cuba, para evitar la fisuración, es necesario introducir un nuevo esfuerzo mediante los tensores. Después de algunos tanteos se llega a la conclusión de que el valor de este nuevo esfuerzo debe ser positivo y de unos 300 Kg. por metro lineal y uniforme en toda la longitud.

Si se toma el valor citado anteriormente, los esfuerzos definitivos que habrá que introducir mediante los tensores que unen las cabezas serán la suma de este esfuerzo de 300 Kg. por m. y de los valores (XVII) es decir:

<u>Esfuerzos definitivos en los tensores que unen las cabezas.</u>

$\frac{x}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
Acueducto vacío	300	145	110	110	110	110	Kg/m.l.	(XVIII)
Acueducto lleno	300	185	154	154	154	154	Kg/m.l.	

Debido a estos nuevos esfuerzos, aparecen en la lámina unos esfuerzos adicionales N_φ , Q_φ , y

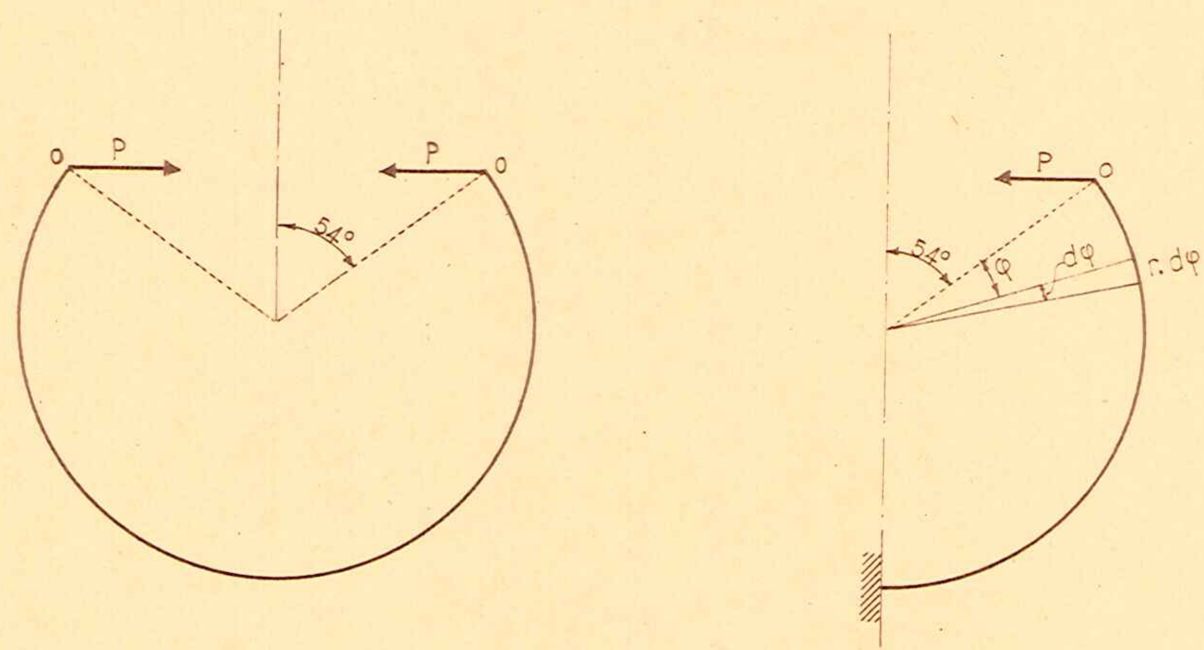

Fig. 4

M_φ cuyos valores se indican a continuación.

φ	0º	21º	42º	63º	84º	105º	126º
$N_\varphi = 300\cdot\cos(54º+\varphi)$	176	78	-31	-136	-223	-280	-300
$Q_\varphi = -300\cdot\mathrm{sen}(54º+\varphi)$	-243	-290	-298	-267	-201	-108	0
$M_\varphi = -300\cdot 0,124 + +300\cdot r\left[\cos(54º+ +\varphi) - \cos 54º\right]$	-37	-202	-383	-558	-702	-797	-830

(XIX)

Hay que hacer constar que todos estos esfuerzos son independientes de la abcisa longitudinal $\underline{x}$.

Al introducir los esfuerzos que aparecen en (XVIII) en los bordes de la lámina, el recorrido horizontal que se había supuesto nulo en el cálculo laminar, tendrá un valor δ uniforme en toda la longitud que es preciso determinar ya que los marcos de rigidez deberán presentar el mismo corrimiento.

Si se observa la fig. 4, el corrimiento horizontal δ del punto $\underline{O}$, debido al esfuerzo horizontal P tiene la siguiente expresión:

$$\delta = \int_0^{\pi-54^\circ} M_f \cdot \frac{dM_f}{dP} \cdot d\xi = \int_0^{\pi-54^\circ} M_f \cdot \frac{dM_f}{dP} \cdot \frac{r}{EI} \cdot d\varphi$$

$$M_f = P \cdot r \left[\cos 54^\circ - \cos (54^\circ + \varphi) \right]$$

$$\frac{dM_f}{dP} = r \left[(\cos 54^\circ - \cos (54^\circ + \varphi) \right]$$

$$\delta = P \frac{r^3}{EI} \int_0^{\pi-54^\circ} \left[\cos 54^\circ - \cos (54^\circ + \varphi) \right] d\varphi =$$

$$= P \frac{r^3}{EI} \int_{54^\circ}^{\pi} \left[\cos 54^\circ - \cos \delta \right]^2 d\varphi =$$

$$= P \frac{r^3}{EI} \left[0{,}7 \ \left(\frac{1}{2} + \cos^2 54^\circ\right) + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 54^\circ \cos 54^\circ \right] =$$

$$= 2{,}573\ P \cdot \frac{r^3}{EI} = 2{,}573 \frac{1}{E} \frac{300}{100} \frac{166{,}5^3}{\frac{1}{12} \cdot 15^3} = 126.670 \frac{1}{E}$$

Luego:

$$\delta = \frac{126.670}{E} \qquad \text{(XX)}$$

δ viene medido en cm. si E se expresa en Kg/cm^2

<u>Estudio de las tensiones en la pared interior de la cuba.</u>

Se estudiarán los dos casos más desfavorables que se pueden presentar; en primer lugar acueducto vacío sin compresión longitudinal, en estas condiciones estará durante la construcción y en segundo lugar acueducto en servicio, es decir lleno y con la compresión longitudinal.

a) Acueducto vacío.

Antes de descimbrar se dará a los tensores que unen las cabezas los esfuerzos que se indican en (XVIII) para acueducto vacío; con lo cual los valores de $N\varphi$ y $M\varphi$ del cálculo laminar vendrán incrementados en los valores indicados en (XIX), es decir los valores de estos esfuerzos que habrá que considerar, en este caso, serán los que se indican en los dos cuadros siguientes:

N_φ

x/ℓ \ φ	0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	176	78	-31	-136	-223	-280	-300
0,1	-85	-104	-63	7	81	136	154
0,2	-232	-214	-93	77	245	366	408
0,3	-237	-232	-118	57	233	362	408
0,4	-170	-200	-134	-5	134	240	280
0,5	-131	-179	-139	-36	81	172	208

M_{φ}

x/ℓ \ φ	0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	-37	-202	-383	-558	-702	-797	-830
0,1	-16	-195	-380	-565	-707	-801	-833
0,2	-4	-190	-388	-569	-712	-806	-837
0,3	-3	-189	-385	-569	-716	-811	-843
0,4	-9	-190	-382	-567	-718	-814	-848
0,5	-12	-190	-380	-568	-719	-815	-850

A partir de los valores de N_φ y M_φ de los cuadros anteriores y los de N_x , $N_{\varphi x}$, M_x y $M_{\varphi x}$ del cálculo láminar, se obtienen las tensiones en la cara interior de la cuba mediante las fórmulas:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{1500} + \frac{M_x}{37{,}5} \quad (\mathrm{Kg/cm2})$$

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{1500} + \frac{M_\varphi}{37{,}5} \quad (\mathrm{Kg/cm2})$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{N_{\varphi x}}{1500} + \frac{M_t}{37{,}5} \quad (\mathrm{Kg/cm2})$$

σ_x (Kg/cm²)

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	126
0	N_x / 1500	11,5	6,6	1,2	-0,6	-8,3	-11,1	-12,1
	M_x / 37,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	σ_x	11,5	6,6	1,2	-0,6	-8,3	-11,1	-12,1
0,1	N_x / 1500	5,5	3,2	0,6	-0,1	-3,9	-5,3	-5,8
	M_x / 37,5	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	σ_x	5,6	3,2	0,6	-0,1	-3,9	-5,3	-5,8
0,2	N_x / 1500	0,4	0,3	0,1	0,1	-0,3	-4,3	-0,5
	M_x / 37,5	0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1
	σ_x	0,5	0,3	0,1	0,1	-0,4	-4,4	-0,6
0,3	N_x / 1500	-3,1	-1,8	-0,3	0,2	2,3	0,3	3,3
	M_x / 37,5	0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1
	σ_x	-3,0	-1,8	-0,3	0,2	-2,2	0,2	3,2
0,4	N_x / 1500	-5,1	-3,0	-0,6	0,0	3,7	5,0	5,4
	M_x / 37,5	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1
	σ_x	-5,1	-3,0	-0,6	0,0	3,6	4,9	5,3
0,5	N_x / 1500	-5,7	-3,3	-0,7	0,0	4,1	5,6	6,1
	M_x / 37,5	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1
	σ_x	-5,7	-3,3	-0,7	0,0	4,0	5,5	6,0

σ_φ (Kg/cm^2)

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	126
0	$N_\varphi/1500$	0,1	0,0	0,0	-0,1	-0,2	-0,2	-0,2
	$M_\varphi/37{,}5$	-1,0	-5,4	-10,2	-14,9	-18,7	-21,2	-22,1
	σ_φ	-0,9	-5,4	-10,2	-15,0	-18,9	-21,4	-22,3
0,1	$N_\varphi/1500$	0,0	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1
	$M_\varphi/37{,}5$	-0,4	-5,2	-10,3	-15,1	-18,9	-21,4	-22,2
	σ_φ	-0,4	-5,3	-10,3	-15,1	-18,9	-21,3	-22,1
0,2	$N_\varphi/1500$	-0,2	-0,1	-0,1	0,0	0,2	0,2	0,3
	$M_\varphi/37{,}5$	-0,1	-5,1	-10,3	-15,2	-19,0	-21,5	-22,3
	σ_φ	-0,3	-5,2	-10,4	-15,2	-18,8	-21,3	-22,0
0,3	$N_\varphi/1500$	-0,2	-0,2	-0,1	0,0	0,2	0,2	0,3
	$M_\varphi/37{,}5$	-0,1	-5,0	- 10,3	-15,2	-19,1	-21,6	-22,5
	σ_φ	-0,3	-5,2	- 10,4	-15,2	-18,9	-21,4	-22,2
0,4	$N_\varphi/1500$	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,2
	$M_\varphi/37{,}5$	-0,3	-5,1	-10,2	-15,1	-19,1	-21,7	-22,6
	σ_φ	-0,4	-5,2	-10,3	-15,1	-19,0	-21,5	-22,4
0,5	$N_\varphi/1500$	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,1	0,1	0,1
	$M_\varphi/37{,}5$	-0,3	-5,1	- 10,1	-15,1	-19,2	- 21,7	-22,7
	σ_φ	-0,4	-5,2	- 10,2	-15,1	-19,1	- 21,6	-22,8

$\tau_{x\varphi}$ (Kg/cm²)

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	120
0	$N_{\varphi x}$ / 1500	2,7	4,2	4,8	4,6	3,5	1,9	0,0
	N_t / 37,5	0,0	0,2	0,2	0,2	0,1	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	2,7	4,4	5,0	4,8	3,6	1,9	0,0
0,1	$N_{\varphi x}$ /1500	2,4	3,8	4,5	4,1	3,2	1,8	0,0
	N_t / 37,5	0,0	0,2	0,2	0,2	0,1	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	2,4	4,0	4,7	4,3	3,3	1,8	0,0
0,2	$N_{\varphi x}$ / 1500	1,9	2,9	3,4	3,2	2,5	1,4	0,0
	N_t / 37,5	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	1,9	3,0	3,5	3,3	2,6	1,4	0,0
0,3	$N_{\varphi x}$ / 1500	1,1	1,8	2,1	2,0	1,6	0,9	0,0
	N_t / 37,5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	1,2	1,9	2,2	2,1	1,7	1,0	0,0
0,4	$N_{\varphi x}$ / 1500	0,5	0,8	1,0	0,9	0,7	0,4	0,0
	N_t / 37,5	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	0,5	0,8	1,0	1,0	0,8	0,4	0,0
0,5	$N_{\varphi x}$ / 1500	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	N_t / 37,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Las tensiones principales tienen la expresión:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_I \\ \sigma_{II}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_\varphi) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_\varphi)^2 + (2\tau_{x\varphi})^2}\right]$$

y sus valores se pueden ver en el cuadro siguiente

Tensiones principales en kg/cm^2 , en la cara interior de la cuba

ACUEDUCTO VACIO (sin compresión longitudinal)

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	126
0	σ_I	12,0	8,0	3,1	0,8	-7,2	-10,8	-12,1
	σ_{II}	-1,5	-6,8	-12,1	-16,5	-20,0	-21,7	-22,3
0,1	σ_I	6,5	4,8	2,3	1,0	- 3,2	-5,1	- 5,8
	σ_{II}	-1,2	-6,9	-12,1	-16,3	-19,6	-21,5	-22,1
0,2	σ_I	2,0	1,6	1,1	0,8	0,0	- 4,3	- 0,6
	σ_{II}	-1,9	-6,5	-11,5	-15,9	-19,2	-21,4	-22,0
0,3	σ_I	0,1	-1,0	0,1	0,5	2,3	0,2	3,2
	σ_{II}	-3,5	-6,1	-10,8	-15,5	-19,0	-21,5	-22,2
0,4	σ_I	-0,3	-2,8	- 0,5	0,0	3,6	4,9	5,3
	σ_{II}	5,2	-5,4	-10,4	-15,1	-19,1	-21,0	-22,4
0,5	σ_I	-0,4	-3,3	- 0,7	0,0	4,0	5,5	6,0
	σ_{II}	-5,7	-5,2	-10,2	-15,1	-19,1	-21,6	-22,6

De la observación del cuadro anterior se deduce, que para el caso de acueducto vacío toda la cara interior de la cuba está trabajando a compresión, exceptuando una pequeña zona en la parte baja del centro del vano que tiene una tracción máxima de 6 Kg/cm^2 y otra zona en la parte alta del apoyo en que aparece una tensión máxima de tracción de 12 Kg/cm^2.

Teniendo en cuenta que al acueducto, además de la compresión longitudinal, se le aplicarán unos pretensados parciales en las cabezas superiores y encima de las zonas de apoyo de las pilas, las tensiones halladas anteriormente se reducirán notablemente, como se verá en el cálculo de este pretensado.

b) Acueducto lleno

El esfuerzo de compresión longitudinal que transmite el arco es de 440 T; no obstante y como caso más desfavorable para tener en cuenta pérdidas por rozamiento, etc, se rebajará la cifra anterior en un 25%, con lo que se considerará una compresión longitudinal de cálculo de 330 T.

Los esfuerzos en los tensores que unen las cabezas son los indicados en (XVIII) para acueducto lleno.

El esfuerzo de compresión longitudinal de 330 T, representa una tensión longitudinal de:

$$\sigma_x = \frac{330.000}{S} = \frac{330.000}{13.670} = 24,1 \text{ Kg/cm}^2 \text{ a compresión}$$

Los valores de los esfuerzos $N\varphi$ y $M\varphi$ que habrá que considerar en este caso serán los correspondientes al cálculo laminar incrementados con los valores indicados en (XIX) y que se indican en los dos cuadros siguientes:

N_{φ}

x/l \ φ	0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	176	78	-31	-136	-223	-280	-300
0,1	-63	463	1230	2064	2795	3289	3463
0,2	-200	857	1911	3279	4464	5209	5589
0,3	-209	818	1803	3251	4492	5345	5040
0,4	-151	467	1457	2509	3045	4378	4641
0,5	-117	389	1236	2238	3171	3833	4072

n_{φ}

x/ℓ \ φ	0°	21°	42°	63°	84°	105°	126°
0	-37	-202	-303	-558	-702	-797	-830
0,1	-16	-209	-405	-580	-716	-803	-834
0,2	-4	-212	-416	-585	-728	-813	-842
0,3	-3	-210	-415	-588	-738	-825	-855
0,4	-9	-205	-408	-590	-743	-836	-868
0,5	-12	-203	-405	-594	-746	-840	-874

Aplicando las fórmulas

$$\sigma_x = \frac{N_x}{1500} + \frac{M_x}{37,5} - 24,1 \ (Kg/cm^2)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{1500} + \frac{M_\varphi}{37,5} \qquad (Kg/cm^2)$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{N_{\varphi x}}{1500} + \frac{M_t}{37,5} \qquad (Kg/cm^2)$$

se obtienen los valores de las tensiónes en la cara anterior de la cuba que se pueden ver en los tres cuadros siguientes

σ_x (Kg/cm^2)

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	126
0	Pretensado	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1
	N_x / 1500	37,3	21,3	3,8	-12,9	-26,5	-35,6	-38,7
	M_x / 37,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	σ_x	13,2	-2,8	-20,3	-37,0	-50,6	-59,7	-62,8
0,1	Pretensado	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1
	N_x / 1500	17,6	10,1	2,0	-6,0	-12,6	-17,0	-18,5
	M_x / 37,5	0,0	-0,1	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,3
	σ_x	-6,5	-14,1	-22,3	-30,2	-36,7	-41,0	-42,3
0,2	Pretensado	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1
	N_x / 1500	1,2	0,8	0,3	-0,3	-0,9	-1,4	-1,5
	M_x / 37,5	-0,1	-0,1	-0,2	-0,2	0,0	0,3	0,5
	σ_x	-23,0	-23,4	-24,0	-24,6	-25,0	-25,2	-25,1
0,3	Pretensado	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1
	N_x / 1500	-10,2	-5,8	-1,0	3,5	7,2	9,7	10,5
	M_x / 37,5	-0,1	-0,2	-0,3	-0,2	0,1	0,4	0,7
	σ_x	-34,4	-30,1	-25,4	-20,8	-16,8	-14,0	-12,9
0,4	Pretensado	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1
	N_x / 1500	-16,4	-9,5	-1,9	5,5	11,8	16,0	17,4
	M_x / 37,5	-0,2	-0,3	-0,3	-0,2	0,1	0,5	0,8
	σ_x	-40,7	-33,9	-26,3	-18,8	-12,2	-7,6	-5,9
	Pretensado	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1	-24,1
	N_x / 1500	-18,3	-10,7	-2,2	6,2	13,2	17,9	19,5
	M_x / 37,5	-0,2	-0,3	-0,3	-0,1	-0,1	0,5	0,9
	σ_x	-42,6	-35,1	-26,6	-18,0	-11,0	-5,7	-3,7

σ_φ (Kg/cm2)

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	126
0	N_φ / 1500	0,1	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,2	-0,2
	N_φ / 37,5	-1,0	-5,4	-10,2	-14,9	-18,8	-21,2	-22,1
	σ_φ	-0,9	-5,4	-10,2	-15,0	-18,9	-21,4	-22,3
0,1	N_φ / 1500	0,0	0,3	0,8	1,4	1,9	2,2	2,3
	N_φ / 37,5	-0,4	-5,6	-10,8	-15,5	-19,1	-21,4	-22,2
	σ_φ	-0,4	-5,3	-10,0	-14,1	-17,2	-19,2	-19,9
0,2	N_φ / 1500	-0,1	0,4	1,3	2,2	3,0	3,5	3,7
	N_φ / 37,5	-0,1	-5,7	-11,1	-15,9	-19,4	-21,7	-22,5
	σ_φ	-0,2	-5,3	-9,8	-13,7	-16,4	-18,2	-18,8
0,3	N_φ / 1500	-0,1	0,4	1,2	2,2	3,0	3,5	3,7
	N_φ / 37,5	-0,1	-5,6	-11,1	-16,0	-19,7	-22,0	-22,8
	σ_φ	-0,2	-5,2	-9,9	-13,8	-16,7	-18,5	-19,1
0,4	N_φ / 1500	-0,1	0,3	1,0	1,8	2,4	2,3	3,1
	N_φ / 37,5	-0,2	-5,5	-10,9	-16,0	-19,9	-22,3	-23,1
	σ_φ	-0,3	-5,2	-9,9	-14,2	-17,5	-20,0	-20,0
0,5	N_φ / 1500	-0,1	0,3	0,8	1,5	2,1	2,6	2,7
	N_φ / 37,5	-0,3	-5,4	-10,8	-15,8	-19,9	-22,4	-23,3
	σ_φ	-0,4	-5,1	-10,0	-14,3	-17,8	-19,8	-20,6

$\tau_{x\varphi}$

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	126
0	$N_{\varphi x}/1500$	8,6	13,5	15,4	14,6	11,3	6,1	0,0
	$N_t/37,5$	0,5	0,6	0,4	0,2	0,1	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	9,1	14,1	15,8	14,8	11,4	6,1	0,0
0,1	$N_{\varphi x}/1500$	7,8	12,3	14,1	13,4	10,4	5,5	0,0
	$N_t/37,5$	0,5	0,5	0,4	0,2	0,2	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	8,3	12,8	14,5	13,6	10,6	5,5	0,0
0,2	$N_{\varphi x}/1500$	6,0	9,3	10,8	10,3	8,0	4,4	0,0
	$N_t/37,5$	0,4	0,4	0,3	0,3	0,2	0,1	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	6,4	9,7	11,1	10,6	8,2	4,5	0,0
0,3	$N_{\varphi x}/1500$	3,7	5,7	6,7	6,5	5,1	2,8	0,0
	$N_t/37,5$	0,2	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	3,9	5,9	6,9	6,8	5,3	2,9	0,0
0,4	$N_{\varphi x}/1500$	1,7	2,6	3,1	3,0	2,4	1,3	[illegible]
	$N_t/37,5$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	1,8	2,7	3,2	3,2	2,5	1,4	0,0
0,5	$N_{\varphi x}/1500$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$N_t/37,5$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\tau_{x\varphi}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Las tensiones principales tienen la expresión:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_I \\ \sigma_{II}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_\varphi) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_\varphi)^2 + (2\tau_{x\varphi})^2}\right]$$

y sus valores se pueden ver en el cuadro siguiente:

Tensiones principales en Kg/cm^2, en la cara interior de la cuba

ACUEDUCTO LLENO (con 330 T. de compresión longitudinal

$\frac{x}{l}$		Valores de φ en grados						
		0	21	42	63	84	105	126
0	σ_I	17,7	10,0	1,4	-7,6	-15,3	-20,5	-22,3
	σ_{II}	-5,4	-18,3	-31,8	-44,5	-54,3	-60,7	-62,8
0,1	σ_I	5,4	3,9	-0,4	-6,4	-12,6	-17,9	-19,9
	σ_{II}	-12,3	-23,3	-31,9	-38,0	-41,4	-42,3	-42,3
0,2	σ_I	1,5	-1,1	-3,7	-7,3	-11,5	-16,0	-18,8
	σ_{II}	-24,7	-27,6	-30,1	-31,1	-30,0	-27,4	-25,1
0,3	σ_I	0,2	-3,9	-7,3	-8,7	-11,5	-12,6	-12,9
	σ_{II}	-34,8	-31,5	-28,1	-25,0	-22,1	-19,9	-19,1
0,4	σ_I	-4,7	-5,0	-8,3	-12,6	-11,2	-7,5	-5,9
	σ_{II}	-45,3	-34,2	-26,9	-20,5	-18,5	-20,2	-20,0
0,5	σ_I	-0,4	-5,1	-10,0	-14,3	-11,0	-5,7	-3,7
	σ_{II}	-42,6	-35,1	-26,6	-18,0	-17,8	-19,8	-20,6

De la observación del cuadro anterior se deduce que para el acueducto en servicio la cara interior de la cuba está trabajando a compresión, exceptuando una zona en la parte alta del apoyo que presenta una tensión máxima de tracción de 17,7 Kg/cm^2.

Como se ha indicado anteriormente, en las zonas de apoyo de los vanos se aplicarán unos pretensados parciales situados en la parte superior de la cuba con objeto de introducir unas tensiones de compresión en las zonas donde aparecen las tracciones a que se hace mención en el párrafo anterior. Las tensiones resultantes se pueden ver más adelante en el cálculo de este pretensado parcial.

Tambien se deduce del cuadro anterior que la máxima compresión en el hormigón es de 62,8 Kg/cm^2. Ahora bien; esta tensión llega a ser 70,9 Kg/cm^2 en los vanos inmediatos al arco, ya que el esfuerzo longitudinal de compresión puede ser de 440 T.

Esfuerzos principales en el plano medio.

En los cuadros que se incluyen a continuación se pueden ver los esfuerzos principales N_I y N_{II} en el plano medio, así como el ángulo γ que forma el esfuerzo principal N_I con el eje + x. Estos esfuerzos se dan para acueducto vacío y acueducto lleno. En el caso de acueducto lleno se ha considerado el esfuerzo de compresión longitudinal de 330 T.

ACUEDUCTO VACIO.

Esfuerzos principales en el plano medio.

x/l	φ	N.	N..	γ
0		18.196	-076	12°22'
0,1		9.577	-1.619	20°23'
0,2	0°	2.925	-2.747	39°57'
0,3		204	-5.344	70°31'
0,4		261	-7.749	78°52'
0,5		307	-8.573	90°
0		12.944	-2.998	25°42'
0,1		8.513	-3.925	33°16'
0,2	21°	4.426	-4.328	42°46'
0,3		1.473	-4.495	56°52'
0,4		66	-4.810	74°35'
0,5		-257	-5.019	90°
0		8.172	-6.318	41°20'
0,1		7.061	-6.151	42°53'
0,2	42°	5.069	-5.023	39°41'
0,3		2.892	-3.482	46°37'
0,4		1.014	-2.016	53°47'
0,5		-108	-1.034	90°
0		6.415	-7.249	46°45'
0,1		6.252	-6.270	45°42'
0,2	63°	5.039	-4.003	44°56'
0,3		3.266	-2.832	44°45'
0,4		1.512	-1.312	45°42'
0,5		100	-30	0°
0		1.949	-14.321	65°15'
0,1		2.963	-8.553	61°17'
0,2	84°	3.788	-3.764	48°28'
0,3		4.710	-878	29°15'
0,4		5.735	129	11°38'
0,5		6.170	304	0°
0		483	-17.099	80°27'
0,1		1.179	-8.723	73°52'
0,2	105°	2.143	-2.141	53°45'
0,3		2.924	-718	46°16'
0,4		7.503	467	4°53'
0,5		8.370	452	0°
0		0	-18.096	90°
0,1		454	-8.606	90°
0,2	126°	708	-718	90°
0,3		4.936	708	0°
0,4		8.136	580	0°
0,5		9.148	508	0°

ACUEDUCTO LLENO

Esfuerzos principales en el plano medio

x	φ	N_I	N_{II}	γ
0		26,070	-8,350	28°20'
0,1		7,700	-17,683	59°0'
0,2		1,830	-36,610	76°10'
0,3	0°	205	-52,075	83°50'
0,4		-227	-60,967	87°40'
0,5		-293	-63,780	90°
0		18,241	-22,539	48°0'
0,1		11,077	-31,663	60°0'
0,2		5,425	-39,875	70°55'
0,3	21°	2,121	-46,500	78°35'
0,4		686	-50,754	85°40'
0,5		311	-52,192	90°
0		12,490	-42,991	61°40'
0,1		11,370	-43,370	65°50'
0,2		7,990	-41,810	69°40'
0,3	42°	4,360	-40,222	76°26'
0,4		2,022	-39,578	83°30'
0,5		1,269	-39,489	90°
0		7,634	-63,128	70°50'
0,1		9,590	-52,610	69°50'
0,2		8,693	-41,987	70°15'
0,3	63°	5,974	-33,526	75°15'
0,4		3,385	-28,515	81°45'
0,5		2,374	-26,941	90°
0		3,615	-79,605	78°0'
0,1		6,927	-59,073	75°55'
0,2		7,890	-40,792	75°15'
0,3	84°	6,550	-27,170	76°30'
0,4		4,415	-19,005	81°15'
0,5		3,394	-16,393	90°
0		943	-90,477	84°10'
0,1		4,652	-62,828	82°45'
0,2		6,538	-39,222	81°40'
0,3	105°	6,290	-22,290	81°30'
0,4		4,882	-12,538	84°0'
0,5		4,113	-9,370	90°
0		0	-94,227	90°
0,1		3,763	-64,048	90°
0,2		5,889	-38,502	90°
0,3	126°	5,949	-20,387	90°
0,4		4,941	-10,142	90°
0,5		4,372	-6,905	90°

NOTACION

a = factor de la parte real de cuatro de las soluciones de la ecuación característica de octavo grado.

b = factor de la parte imaginaria de cuatro de las soluciones de la ecuación característica de octavo grado.

B_1, B_2, B_3 y B_4 = constantes de integración que se determinan con las condiciones de sustentación y recorridos en los bordes longitudinales de la cuba.

c = igual que a.

d = igual que b

d = distancia horizontal definida en la fig. 2

e = base de los logaritmos neperianos

E = módulo de elasticidad del hormigón de la cuba, en Kg/cm^2.

$f_1(\varphi)$; $f_2(\varphi)$; $f_3(\varphi)$; $f_4(\varphi)$ = funciones de integración

g_1; g_2 = valores auxiliares para determinar las raíces de la ecuación característica.

h = altura de agua

h_1; h_2 = valores auxiliares para determinar las raíces de la ecuación característica.

I = momento de inercia

$i = \sqrt{-1}$

l = longitud de un vano del acueducto = 20 m.

m = raiz de la ecuación característica de octavo grado.

M_f = momento flector

M_x = momento unitario de flexión en una sección - transversal de la cuba. Positivo si produce tracción en la cara interior. En Kg.m. por m.

M_{x_s} = momento unitario de flexión en una sección transversal de la cuba. Positivo si produce tracción en la cara interior. En Kg.m. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

M_φ = momento unitario de flexión en una sección - longitudinal de la cuba. Positivo si produce tracción en la cara interior. En Kg.m. por m.

M_{φ_s} = momento unitario de flexión en una sección longitudinal de la cuba. Positivo si produce tracción en la cara interior. En Kg.m. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

M_t = momento unitario de torsión en la cuba. Positivo si produce un esfuerzo tangencial positivo en la cara interior. En Kg.m. por m.

M_{t_s} = momento unitario de torsión en la cuba. Positivo si produce un esfuerzo tangencial positivo en la cara interior. En Kg.m. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

N_x = esfuerzo unitario normal en una sección transversal de la cuba. Positivo si es tracción. En Kg. por m.

N_{x_m} = esfuerzo unitario normal en una sección transversal de la cuba. Positivo si es tracción. En Kg. por m. Correspondiente al estado membrana.

N_{x_s} = esfuerzo unitario normal en una sección transversal de la cuba. Positivo si es tracción. En Kg. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

N_φ = esfuerzo unitario normal en una sección longitudinal de la cuba. Positivo si es tracción. En Kg. por m.

N_{φ_m} = esfuerzo unitario normal en una sección longitudinal de la cuba. Positivo si es tracción. En Kg. por m. Correspondiente al estado membrana.

N_{φ_s} = esfuerzo unitario normal en una sección longitudinal de la cuba. Positivo si es tracción. En Kg. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

$N_{\varphi x}$ = esfuerzo unitario tangencial en el plano medio de la cuba. Positivo cuando produce tracción según los valores de las coordenadas crecientes. En Kg. por m.

$N_{\varphi x_m}$ = esfuerzo unitario tangencial en el plano medio de la cuba. Positivo cuando produce tracción según los valores de las coordenadas crecientes. En Kg. por m. Correspondiente al estado membrana.

$N_{\varphi x_s}$ = esfuerzo unitario tangencial en el plano medio de la cuba. Positivo cuando produce tracción según los valores de las coordenadas crecientes. En Kg. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

N_I; N_{II} = esfuerzos principales en el plano medio de la cuba. En Kg. por m.

n = número entero impar. $n = 1$ para el primer término de la serie de Fourier, $n = 3$ para el 2º, etc.

P = peso de la cabeza longitudinal de la cuba. En Kg. por m.

P_h = presión hidrostática por metro cuadrado de superficie.

P_p = peso propio por metro cuadrado de cuba

Q_x = esfuerzo cortante unitario radial en una sección transversal. Positivo si actúa hacia el exterior en la cara más próxima al eje de las x. En Kg. por m.

Q_{x_s} = esfuerzo cortante unitario radial en una sección transversal. Positivo si actúa hacia el exterior en la cara más próxima al eje de las x. En Kg. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

Q_φ = Esfuerzo cortante unitario radial en una sección longitudinal. Positivo si actúa hacia el exterior en la cara más próxima al eje de las . En Kg. por m.

$Q_{\varphi s}$ = Esfuerzo cortante unitario radial en una sección longitudinal. Positivo si actúa hacia el exterior en la cara más próxima al eje de las . En Kg. por m. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

q = Valor auxiliar para determinar las raíces de la ecuación característica.

R_ϕ = Reacción por unidad de longitud en los bordes - longitudinales. En Kg. por m.

r = 1,665 m = Radio medio de la sección transversal de la cuba.

S_v = Esfuerzo tangencial en la unión de la cuba con la cabeza longitudinal. En Kg. por m:

T_t = Esfuerzo en los tensores que unen las cabezas. En Kg. por m.

t = 0,15 m = Espesor de la cuba

u = Corrimiento longitudinal

u_m = Corrimiento longitudinal. Correspondiente al estado membrana.

u_s = Corrimiento longitudinal. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

u_v = Corrimiento longitudinal. Correspondiente a la cabeza de la cuba.

v = Corrimiento transversal

v_m = Corrimiento transversal. Correspondiente al estado membrana.

v_s = Corrimiento transversal. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

w = Corrimiento radial

w_m = Corrimiento radial. Correspondiente al estado membrana.

w_s = Corrimiento radial. Debido al vano simplemente apoyado en sus extremos.

x = Coordenada longitudinal medida desde el apoyo dorsal del vano.

Y = Componente transversal de las cargas en la cuba. En Kg/m^2

Z = Componente radial de las cargas en la cuba. En Kg/m^2

$\alpha = \frac{n\pi . r}{l}$

$\beta = \frac{t^2}{12 . r^2}$

γ = Ángulo que forma el esfuerzo principal N_I con el eje x

δ = Corrimiento horizontal en el borde longitudinal de la cuba

Δ = Valor auxiliar para determinar las raices de la ecuación característica.

ε_V = Deformación longitudinal de la cabeza de la cuba.

θ = Ángulo definido en la fig. 1

σ_x = Tensión longitudinal. En Kg/cm^2

σ_φ = Tensión transversal. En Kg/cm^2

$\tau_{x\varphi}$ = Tensión tangencial. En Kg/cm^2

σ_I , σ_{II} = Tensiones principales. En Kg/cm^2.

Σ = Signo de suma

$\rho = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{\beta}}$

$\lambda = \dfrac{\alpha^2}{\rho^2}$

φ = Coordenada angular medida desde el borde izquierdo de la cuba.

φ_b = 54º = Ángulo definido en la fig. 1

ϕ_k = 126º = Semiángulo de abertura de la cuba.

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots \phi_8$ = Funciones trigonométrico-exponenciales de φ.

ω = Ángulo medido desde el borde derecho de la cuba.

Ω_v = Area de la sección transversal de la cabeza de la cuba. En m^2.