TEORÍA

DE LOS

PUENTES COLGADOS

POR

DON EDUARDO SAAVEDRA,

INGENIERO JEFE DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.

SEGUNDA EDICION.

MADRID
IMPRENTA NACIONAL
1864.

La propia experiencia y consejos ajenos me han hecho conocer algunas de las faltas de que adolecia la primera edicion de este libro. Debiendo reimprimirse para texto de la Escuela de Caminos, he aprovechado la ocasion para corregirlas en lo que me fuera dable, y por eso encontrará el lector algun tanto variada esta edicion respecto de la anterior. Mi principal atencion ha sido simplificar en lo posible la exposicion de las diversas teorías que componen este tratado, y muy principalmente las relativas á la forma de equilibrio de las cadenas, al pandeo del fiador, á los puentes de varios tramos y á las oscilaciones, donde con tal objeto he introducido una hipótesis nueva. He añadido el cálculo y aplicaciones de los cables inversos y de los tirantes superiores, y en lugar de los puentes Vergniais que tienen poco de colgantes, explico el sistema Oudry. Finalmente, he dedicado un capítulo á la formacion de un proyecto de puente, que sirve al mismo tiempo en todo el curso de la teoría de tipo para manifestar con números cuál es la verdadera importancia, tanto de las fórmulas que se proponen, como de los términos y cantidades que se desprecian.

INTRODUCCION.

Aunque sea bien conocido el sistema de puentes llamados *colgantes*, *colgados* ó *suspendidos*, así como las partes principales de que se compone una obra de esta naturaleza, no estará demas, para la mejor inteligencia de este escrito, que empecemos por hacer una sucinta descripcion de lo más notable de ellas, con lo cual, además de fijar las denominaciones de las diferentes piezas, haremos ver las circunstancias y condiciones en que se encuentran.

El sistema de puentes que nos ocupa es el que ofrece más estabilidad y ménos rigidez entre todos: para hacer esto bien claro, es necesario observar que todo puente está compuesto de dos partes, á saber: el *tablero* cuya posicion y dimensiones son un dato comun á todos los sistemas, y la *cercha*, *armadura* ó *cuchillo* que sostiene con su resistencia y estabilidad al tablero; y que las diversas combinaciones entre la posicion de una y otra parte dan orígen á una clasificacion de los puentes en este sentido. La *cercha* ó *cuchillo* puede tener su convexidad ó su concavidad dirigidas al tablero, y puede ser superior á él ó inferior, de donde nacen cuatro géneros de puentes que son los representados en las figs. 1, 2, 3, 4. En los dos primeros, los arcos *a* han de ser rígidos ó susceptibles de sufrir flexion y compresion, al paso que en los otros dos han de ser flexibles y capaces solo de sufrir tensiones.

La estabilidad de cada género depende de la posicion del tablero respecto del centro de gravedad del arco, de lo que se sigue que el que la tiene mayor es el de la fig. 4.ª (puentes colgados), y el que la tiene

menor es el de la 1.ª La rigidez depende de la naturaleza de las piezas que se han de emplear para formar el arco, así como para referir á él las presiones del tablero: el género de la fig. 1.ª (puentes ordinarios de madera ó hierro) en que además de ser rígido el arco *a* tienen que serlo las piezas *bb* que lo unen al tablero, es el que la ofrece mayor, y en el de la fig. 4.ª es la menor. Los de las figs. 2 y 3 son en ambas propiedades un intermedio.

Las figs. 5 y 5A representan las dos proyecciones de un puente colgado.

El arco flexible es el conjunto de cadenas AO, A'O', cuyos extremos se fijan en la parte superior de los apoyos AC. Ántes se construian siempre de eslabones de hierro forjado, de lo que es un ejemplo el puente de Aranjuez; pero ahora se hace un uso casi exclusivo de los cables de alambre, que es más fuerte y más barato y se acomoda mejor á las exigencias de las obras, como se ve en el puente de Arganda y otros muchos construidos en España.

El tablero se compone de un piso de tablones y largueros que descansa en viguetas trasversales, suspendidas directamente de los cables y arriostradas entre sí. Sobre ellas va tambien el antepecho ó barandilla, que puede disponerse de modo que contribuya con su rigidez á la resistencia de la obra.

La suspension de las viguetas se verifica por medio de varillas verticales que se llaman *péndolas*, y son de hierro forjado ó de alambre. La union de estas dos piezas se verifica con un estribo de hierro (fig. 6) ó atravesando con un tornillo la vigueta (fig. 7). La péndola se asegura al cable con un caballete (fig. 8) ó un lazo (fig. 9) que no resbalan por impedírselo una ligadura que se coloca al costado. Tambien se usa un caballete en los puentes de cadenas de hierro forjado.

Los apoyos pueden ser pilas de fábrica como en la fig. 5, en cuyo caso se reunen formando un pórtico para que tengan más estabilidad, ó columnas de hierro (fig. 10) giratorias alrededor de una rodilla colocada en su base *a* y unidas por un travesaño en lo alto. Como unas ni otras son susceptibles de resistir la tension de los cables,

consolidan por medio de tirantes AE, (fig. 5) que se llaman *fiadores*, amarrados al interior del terreno ó del cimiento de la obra, en pozos y galerías.

Cuando los apoyos son movibles, el cable y el fiador se unen invariablemente á su punto más alto, pero cuando son fijos se unen entre sí apoyándolos de diversas maneras. Á veces viene cada uno á sujetarse á un pasador que forma parte de un caballete movible de hierro, pero las más son un cable continuo que corre sobre rodillos ó rozando sobre una plancha (fig. 11). Tambien podrian quedar independientes uniéndose cada uno á un barrote de amarra empotrado en la fábrica del macizo (fig. 12), disposicion que se ha usado especialmente en las pilas intermedias.

Lo flexible de estas obras no sólo hace descender con velocidad los puntos en que se apoya una presion irregular, sino que, no oponiendo resistencia alguna á los movimientos de contraccion, origina las trepidaciones que se sienten al paso de las cargas y las oscilaciones á que el viento da lugar cuando es fuerte. Á esta tendencia se oponen los cables inversos que, con péndolas más delgadas, sujetan por debajo el tablero.

En lo que sigue consideraremos los cables reducidos á uno solo de seccion equivalente á la suma de las de todos, y lo representaremos por su eje de figura. Consideraremos el tablero reducido á la línea *cd* (figura 5), que pasa por los paramentos superiores de todas las viguetas, y reduciremos del mismo modo á su eje las péndolas y fiadores, y para evitar la repeticion de datos, dando á conocer los resultados que corresponden á una obra de magnitud y proporciones ordinarias, en todas las aplicaciones numéricas que sea preciso hacer, supondremos siempre que se trata del puente que como ejemplo se proyecta en el capítulo último, cuyas dimensiones generales son las siguientes:

Ancho del tablero.....	7 metros.
Luz ó amplitud del cable.....	200
Flecha definitiva del cable.....	15
Peso permanente del tablero por metro lineal...	1000 kilógramos.

Estos números representan las condiciones en que se hallan varios puentes muy conocidos, y son al mismo tiempo bastante sencillos para servir de tipo y facilitar los cálculos.

Siendo flexibles las partes principales que constituyen un puente de esta clase, será útil que recordemos sucintamente las propiedades más notables de los polígonos funiculares sujetos principalmente á pesos, que son las fuerzas que en nuestros ejemplos han de obrar casi siempre.

Para que tres fuerzas que concurren en un punto estén en equilibrio, es necesario: 1.° que sus direcciones estén en un mismo plano, y 2.°, que cada una sea igual y contraria á la resultante de las otras dos. Por consiguiente, si una fuerza F (fig. 13) actúa en dos hilos ó cordones AC, BC, fijos en sus extremos A, B, el plano de la figura será el que pasa por A y B, y contenga la recta CF, y las tensiones de cada hilo, que son las resistencias que opone el sistema á que el equilibrio se altere, deben ser respectivamente las componentes C*a*, C*b*, de la fuerza representada por la magnitud CF. De aquí se deduce, primero, que con las magnitudes y direcciones de CF, C*a* y C*b*, ó su igual *a*F, se debe cerrar un triángulo, en que cada lado sea la resultante de los que forman el ángulo opuesto; y segundo, que un sistema de hilos AC_4, C_4C_3, ...C'_3 B (fig. 14) sometido en sus puntos de union á pesos P_4, P_3, ...P'_3 y fijo en sus dos extremos A, B, tomará por sí mismo una figura contenida en el plano vertical que pase por A y B; y que cada peso debe ser igual á la resultante de las tensiones de los dos cordones adyacentes, cerrando con ellas un triángulo.

Como el equilibrio de un sistema de forma variable no se altera porque se fije una parte de él, un lado cualquiera del polígono funicular, no cambiará de tension ni de posicion porque se supongan fijos todos ó parte de los restantes. Si hacemos esta suposicion respecto de todos los lados del polígono, menos los dos AC_4, C'_3B, encontraremos que la resultante de sus tensiones debe ser igual y contraria á la de todos los pesos comprendidos desde C_4 hasta C'_3: esta resultante, por consiguiente, debe pasar por la interseccion C de los dos lados prolongados, y su magnitud CR será la resultante de sus tensiones respectivas C*a* y C*b*. Lo mismo que hemos hecho respecto de los lados extremos, pudiéramos haber repetido respecto de otros dos cualesquiera, y de esto deducimos que siempre que se conozca la tension en magnitud y direccion, de un lado del polígono, la de otro cualquiera ha de ser la resultante de la dada y de la suma de pesos aplicados al polígono entre los dos lados que se consideran. Por esto, la componente de la tension de todos los lados del polígono paralelamente á uno de ellos es igual á la tension de este; siendo la otra componente vertical, é igual á la suma de los pesos intermedios.

Supondremos siempre que hay un lado horizontal en el polígono, como C_1 C', y su tension, que es la mínima, será la que tomemos por punto de comparacion para las demas. Así, una vez conocida ésta, la de cada lado es la resultante de los pesos que actúan desde él hasta el punto más bajo, y de la tension de C_1 C'; por lo que se ve tambien que la componente horizontal de la tension es constante é igual á la del lado C_1 C', y se llama *tension horizontal*. Representando por Q esta tension horizontal, por T la de un lado cualquiera AC_4, por P la suma de todos los pesos P_4, P_3, P_2, P_1, comprendidos desde este lado hasta el horizontal; y por μ el ángulo que forma con esta la direccion de AC_4, tendremos las ecuaciones siguientes entre estas cantidades:

$$T^2 = P^2 + Q^2 \qquad T = \frac{Q}{\cos.\ \mu} \qquad P = T \text{ sen. } \mu \qquad P = Q \text{ tang. } \mu \qquad (1)$$

Cuando se conozca la reparticion de los pesos en los vértices del polígono se conocerá por estas ecuaciones su figura. Si en todo ó parte del polígono hay pesos repartidos segun una ley de continuidad, el polígono ó parte de él se convertirá en una curva. De todos modos, siempre se verificará que si se representa la tension de un lado por su longitud, sus proyecciones horizontal y vertical representarán respectivamente la tension horizontal y la suma de pesos que actúan sobre él.

Cuando la fuerza F (fig. 13) no esté unida fijamente al punto C, sino que por medio de un anillo actúe en un hilo continuo ACB, no habrá equilibrio miéntras la direccion CF no divida en dos partes iguales el ángulo ACB; porque el punto C tiende á describir un arco de

elipse cuyos focos son A y B, y la fuerza F tiene que ser normal á la curva para quedar destruida, lo que exige que sean iguales los ángulos de los dos rádios vectores AC y CB con la recta CF. En este caso son iguales las tensiones C*a*, C*b*.

Si se extiende un hilo sobre una superficie, la presion que ejerce es normal en todos sus puntos á su direccion, y la tension debe ser constante por esto en toda la longitud. La presion varia de un punto á otro en razon inversa del rádio de curvatura, y para demostrarlo, representemos por AC, BC, (fig. 15) los dos elementos consecutivos de la curva que afecte el hilo, y por ACBF el círculo osculador en el punto C: las tensiones, por ser iguales, pueden tambien estar representadas por las longitudes AC, BC, y la presion en este punto, que es la resultante CE de estas dos tensiones, es el doble de la proyeccion CD de una de ellas sobre la normal CF. En el círculo CBF se verifica que

$$CD = \frac{CB^2}{CF}$$

y como CE es la presion en la longitud CB, la correspondiente á la unidad de longitud, será

$$\frac{CE}{CB} \text{ ó } \frac{2CD}{CB} = \frac{2CB}{CF},$$

y siendo CB=T, CF=2ρ, resulta que la presion proporcional es

$$\frac{T}{\rho},$$

suponiendo que no haya rozamiento de la superficie con el hilo.

CAPÍTULO I.

De los cables ó cadenas.

ARTÍCULO I.

Cadenas sometidas á su propio peso.

1. Si un hilo ó cadena AB (fig. 16) de espesor uniforme, se suspende por sus extremidades de dos puntos A, B, que estén en una horizontal, tomará una forma curva AOB, simétrica respecto de la vertical *Oy* equidistante de A y B, pues siendo el mismo P á un lado que á otro de esta línea y Q constante, μ debe ser tambien el mismo. Tomemos por origen de coordenadas el punto más bajo O, y por ejes la horizontal y la vertical que por él pasen; si llamamos x é y las coordenadas de un punto m, s el arco Om y p el peso de la unidad de longitud de cadena, la última de las ecuaciones (1) da

$$\frac{d.y}{d.x} = \frac{ps}{Q}$$

ecuacion de la tangente á la cadenaria, que es horizontal en el punto O.

La relacion $\frac{ps}{Q}$ es una fraccion en todas las aplicaciones á proyectos de puentes colgados, porque en el caso más desfavora-

ble, que es cuando $s=AC$, la condicion de equilibrio del peso de este arco y de la tension horizontal al rededor del punto A da

$$\frac{ps}{Q}=\frac{OC}{DA},$$

siendo DD' la vertical del centro de gravedad de dicho arco. Como la luz AB es más de diez veces la flecha OC, y la distancia DA es casi igual á la mitad de AC (pues en nuestro proyecto no difieren ambas más que en 40 centímetros), la relacion $\frac{OC}{DA}$ es menor de 0,4 y no llega á 0,3 con frecuencia.

2. La abscisa y la ordenada se obtienen en funcion del arco por las fórmulas

$$\frac{dx}{ds}=\left[1+\left(\frac{ps}{Q}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{ps}{Q}\cdot\frac{dx}{ds}=\frac{\frac{ps}{Q}}{\sqrt{1+\left(\frac{ps}{Q}\right)^2}}:$$

de la primera se deduce, desarrollando é integrando,

$$x=s\left[1-\frac{1}{2.3}\left(\frac{ps}{Q}\right)^2+\frac{3}{8.5}\left(\frac{ps}{Q}\right)^4-\frac{5}{16.7}\left(\frac{ps}{Q}\right)^6+\ldots\right]$$

série cuyos términos son rápidamente convergentes en las aplicaciones de esta teoría, porque el valor de $\frac{ps}{Q}$ es mucho menor que la unidad.

La segunda ecuacion se integra directamente determinando la constante por la condicion de que en el orígen sean $y=o$ y $s=o$, y resulta

$$y=s\frac{-1+\sqrt{1+\left(\frac{ps}{Q}\right)^2}}{\frac{ps}{Q}}$$

3. Estas ecuaciones contienen la tension horizontal, que es desconocida: para eliminarla, basta deducir de la segunda el valor de $\frac{ps}{Q}$ que es

$$\frac{ps}{Q}=2\frac{y}{s}\cdot\frac{s^2}{s^2-y^2}, \qquad (2)$$

y sustituirlo en la primera, que se trasforma en esta otra:

$$x=s\left[1-\tfrac{2}{1.3}\left(\frac{y}{s}\right)^2-\tfrac{2}{3.5}\left(\frac{y}{s}\right)^4-\tfrac{2}{5.7}\left(\frac{y}{s}\right)^6-\ldots\right]; \qquad (3)$$

de la que se deduce, invirtiendo la série:

$$\left(\frac{y}{s}\right)^2=\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{s}\right)-\frac{3.2}{2.25}\left(1-\frac{x}{s}\right)^2-\frac{3.3}{2.3\,5.27}\left(1-\frac{x}{s}\right)^3\ldots \qquad (4)$$

4. Cuando se quiera saber la flecha f que tomará una cadena de longitud 2L conocida, suspendida entre dos puntos cuya distancia horizontal es 2H, los tres términos primeros de la ecuacion (3) darán

$$f=L\sqrt{\frac{-5+\sqrt{55-30\frac{H}{L}}}{2}} \qquad (5)$$

que es la fórmula que generalmente se emplea; pero el uso de la série (4) permite aproximar con más comodidad y exactitud.

5. La tension horizontal se determina por medio de la ecuacion (2). La tension en cualquier otro punto se halla por la fórmula

$$T=\sqrt{p^2 s^2+Q^2}$$

deducida de la primera (1).

6. Estas fórmulas no se aplican más que á la colocacion del cable en obra y al establecimiento de la pasadera ó bamba de servicio, en cuyo caso es suficiente atribuirle una tension uniforme igual á Q, poniendo por p el peso de la unidad de longitud del cable y de la parte de tablero que sostiene.

ARTICULO II.

Cadenas sometidas á un peso repartido uniformemente sobre su proyeccion horizontal.

7. En muchas ocasiones podremos admitir que la figura que tome la cadena sea la correspondiente á una carga repartida uniformemente segun la horizontal, porque el peso del tablero es la parte mayor del total del puente, y por estar las cadenas muy tendidas, el de éstas y las péndolas por metro de proyeccion difiere poco entre los distintos puntos de la luz. Para que se forme juicio acerca de esta suposicion, indicaremos que en el proyecto tipo la diferencia de peso entre el metro del centro y los de los extremos es de unos 94 kilógramos, lo que equivale á una desigualdad máxima de 0,05 respecto del peso medio total permanente de la obra. En este caso, la última ecuacion (1) da, designando ahora por p el peso repartido en la unidad de longitud horizontal

$$\frac{dy}{dx}=\frac{px}{Q} \qquad (6)$$

tomando por ejes horizontal y vertical los que pasan por el punto más bajo O (fig. 17), medio de la longitud AOB. Desde luego se conoce que esta curva debe ser una parábola, porque en el triángulo mpt formado por el peso, la tension y su componente horizontal, es el lado mp proporcional siempre á la abscisa mp', por consiguiente la subnormal $t'p'$ lo será á la tension horizontal tp, y como esta es constante, tambien lo será la subnormal, propiedad que caracteriza á la parábola. De esta consideracion, lo mismo que de la ecuacion (6) deducimos la de la curva

$$y=\frac{px^2}{2Q} \qquad (7)$$

en la cual se determina Q cuando se conoce el valor de las variables para un punto, ó una condicion cualquiera á que la curva haya de satisfacer.

8. En la práctica del establecimiento de los puentes colgados es preciso no solo conocer, sino tambien saber calcular con facilidad los diferentes elementos de que se compone la construccion. Por esta razon vamos á ocuparnos detalladamente de la manera de hallar los más importantes. Estos son: 1.° las *ordenadas*, que marcan las dimensiones de las péndolas: 2.° la *longitud* de la curva, que da la del cable y sus partes: 3.° la *tension*, y 4.° la *seccion* del cable.

9. Las *ordenadas* se obtienen por la ecuacion (7) para un punto cualquiera, pero como las péndolas se colocan á distancias iguales entre sí, conviene calcularlas solo para estos puntos determinados. Suponiendo que sea h la separacion de dos inmediatas, y que no haya ninguna en el punto más bajo de la curva, la péndola que ocupa el lugar n, á contar desde el medio, tendrá por abscisa

$$x_n=\frac{h}{2}+(n-1)h=h(n-\tfrac{1}{2})$$

y su longitud será

$$y_n=\frac{ph^2}{8Q}(2n-1)^2 \qquad (8)$$

10. Aunque esta fórmula se presta con comodidad al cálculo, puede éste simplificarse, observando que la diferencia segunda de y_n es

$$\Delta^2 y_n = \frac{ph^2}{Q}(\Delta n)^2$$

y si se hace crecer á n por unidades, esta diferencia será

$$\frac{ph^2}{Q} \qquad (9)$$

que es constante é igual al doble del coeficiente de x^2 en la ecuacion (8) de la curva. Esto nos conducirá á efectuar el cálculo de las péndolas partiendo de los valores de y_1 y $\frac{ph^2}{Q}$, al que designamos por A, en la forma siguiente :

NÚMERO DE LA PÉNDOLA.	DIFERENCIA SEGUNDA.	DIFERENCIA PRIMERA.	ORDENADA CORRESPONDIENTE.
1	A	O	$\frac{A}{8}$
2	A	A	$9\frac{A}{8}$
3	A	2A	$25\frac{A}{8}$
4	A	3A	$49\frac{A}{8}$
5	A	4A	$81\frac{A}{8}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	A	$(n-1)$A	$(2n-1)^2\frac{A}{8}$

y de este modo el cálculo de todas las péndolas se reduce á simples sumas.

11. El valor de Q se determina ordinariamente por la condicion de que la cadena tenga una flecha y una abertura dadas: llamando f á esta flecha y H á la mitad de la abertura,

$$Q = \frac{pH^2}{2f}, \qquad (10)$$

la ecuacion (7) de la parábola se reduce á

$$\frac{y}{f} = \frac{x^2}{H^2} \qquad (11)$$

y el valor de la diferencia constante (9) es

$$A = 2\frac{f}{(N - 1/2)^2}$$

representando por N el número de órden que corresponderia á una péndola que estuviera en el punto de suspension del cable, en donde la abscisa es

$$x_n = h(N - 1/2) = H.$$

Si hubiera una péndola en el punto más bajo ó vértice de la curva, no habria más que reemplazar N por $N + 1/2$, quedando todo lo demas lo mismo.

12. Á la longitud y_n de cada péndola ha de añadirse la distancia desde la horizontal Ox (fig. 18) al tablero. Segun más adelante se verá, la forma de éste es tambien parabólica ; de modo que la longitud de cada péndola se compone de tres partes : una que es la ordenada de la curva del cable, otra la de la del tablero, y otra la distancia constante entre las tangentes horizontales á ambas curvas. Siendo f' la flecha del tablero, la parte que á éste corresponde se calculará por la diferencia segunda

$$A' = 2\frac{f'}{(N-\frac{1}{2})^2}:$$

efectuando las operaciones (10) con la suma $A+A'$ en lugar de A, tendremos de una vez las dos partes variables de la péndola, y sumando á la primera ordenada la distancia constante e entre los vértices O, O' de las dos curvas, saldrá de una vez la longitud total.

13. Puede ser útil averiguar la suma S de las longitudes de todas las péndolas desde el orígen hasta la que ocupe el lugar N.

La expresion de la ordenada puede ponerse bajo la forma

$$y_n = y_N \frac{(2n-1)^2}{(2N-1)^2}$$

y haciendo la suma desde 0 hasta N, se obtendrá

$$S = \frac{y_N}{(2N-1)^2} \cdot \frac{(2N-1)\,2N\,(2N+1)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{1}{3} y_N \left(N+1+\frac{1}{2N-1}\right)$$

Cuando la suma se extiende á todas las péndolas de la mitad del puente, se puede poner f por y_N, y como la fraccion $\frac{1}{2N-1}$ se puede despreciar por ser tan pequeña, que en el proyecto de ejemplo vale $\frac{1}{13329}$ de la parte principal $N+1$, resulta la expresion aproximada

$$S = \frac{1}{3} f (N+1) \qquad (12)$$

Para la parte correspondiente á la curvatura del tablero, tendremos

$$S' = \frac{1}{3} f' (N+1)$$

y por consiguiente, la suma total de las longitudes de las péndolas correspondientes á la mitad de la abertura, será, teniendo en cuenta que no hay péndola en el apoyo,

$$\frac{1}{3}(f+f'+e)(N-2)+e. \qquad (13)$$

14. La seccion de cada péndola se determinará por la mayor carga que pueda actuar en un mismo momento en el espacio h, atendiendo á la composicion y enlace de las piezas del tablero, y á la distribucion de las cargas accidentales y de prueba. Si es P este peso y R la mayor tension que se quiera hacer soportar al material, la seccion será

$$\omega = \frac{P}{R} \qquad (14)$$

15. La *longitud* de la curva desde el orígen hasta un punto cualquiera, será

$$s = \int_0^x dx \left[1+\left(\frac{px}{Q}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ó

$$s = x\left[1+\frac{1}{2.3}\left(\frac{px}{Q}\right)^2 - \frac{1}{8.5}\left(\frac{px}{Q}\right)^4 + \frac{1}{16.7}\left(\frac{px}{Q}\right)^6 - \ldots\right]$$

y poniendo por Q su valor en H y f,

$$s = x\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{2fx}{H^2}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{2fx}{H^2}\right)^4 + \frac{1}{112}\left(\frac{2fx}{H^2}\right)^6 \ldots\right] \qquad (15)$$

y desde O hasta el punto extremo B,

$$L = H\left[1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{H^2} - \frac{2}{5}\frac{f^4}{H^4} + \frac{4}{7}\frac{f^6}{H^6} \ldots\right] \qquad (16)$$

La aproximacion será suficiente casi siempre tomando los dos primeros términos.

16. La ecuacion ([15]) puede recibir otra forma que será útil más adelante. Efectuando la multiplicacion por x, se puede escribir

$$s=\frac{H^2}{2f}\left[\left(\frac{2fx}{H}\right)+\frac{1}{2.3}\left(\frac{2fx}{H^2}\right)^3-\frac{1}{8.5}\left(\frac{2fx}{H^2}\right)^5\cdots\right]$$

y observando que el ángulo μ de la tangente en un punto m con la horizontal es

$$\text{tang. }\mu=\frac{2fx}{H^2},$$

se tiene, llamando α al valor de μ en el punto B de suspension,

$$s=\frac{H}{\text{tang. }\alpha}\left[\text{tang. }\mu+\frac{1}{2.3}\text{tang.}^3\mu-\frac{1}{8.5}\text{tang.}^5\mu\ldots\right] \quad (17)$$

17. La *tension* se obtiene por la segunda fórmula ([1]) que da

$$t=Q\frac{ds}{dx}$$

ó

$$t=\frac{pH^2}{2f}\sqrt{1+\left(\frac{2fx}{H^2}\right)^2} \quad (18)$$

y haciendo $x=H$ obtendremos la tension máxima, que se verifica en el punto más alto,

$$T=\frac{pH^2}{2f}\sqrt{1+\left(\frac{2f}{H}\right)^2}$$

Siendo Q la tension mínima, el valor de t oscila entre dos límites, cuya diferencia es próximamente

$$\frac{2f^2}{H^2} \quad \text{ó} \quad \tfrac{1}{2}\text{tang.}^2\alpha$$

cantidad que nunca llega á 0,08.

18. La *seccion* del cable debe calcularse por la fórmula ([14]) en la que es R la mayor tension que se puede hacer soportar con seguridad á las barras ó alambres que lo forman. Siendo la tension t variable para cada punto, la seccion trasversal que así resultase variaria tambien, disminuyendo desde los extremos al vértice; pero lo pequeño de esta variacion en los puentes ordinarios, hace que siempre se adopte una seccion capaz de resistir en toda la longitud del cable á una tension uniforme é igual á la mayor T. En lugar de p se deberá poner el peso correspondiente al tablero, carga de prueba y péndolas en la unidad de longitud, pero como el peso del cable produce tambien un aumento en la tension, será preciso suponer el peso hallado para él repartido en la proyeccion horizontal, y añadiéndolo á p hacer una nueva sustitucion que dará otro valor de la seccion más aproximado.

19. Estas operaciones pueden excusarse introduciendo como incógnita en el valor de p la seccion desconocida ω. Si es π el peso de la unidad de volúmen de la materia de que se ha de construir el cable, el peso de la mitad de la longitud será $L\omega\pi$, y si p designa el peso de la unidad de la longitud del tablero, aumentado de la parte correspondiente á las péndolas, que se tomará por un término medio deducido de las fórmulas ([13]) y ([14]) el peso que obra en el punto más alto de la curva es

$$P=pH+L\omega\pi$$

y como por las fórmulas ([1])

$$T=\frac{pH+L\omega\pi}{\text{sen. }\alpha}$$

resulta por fin

$$R\omega=\frac{pH+L\omega\pi}{\text{sen. }\alpha}$$

y $$\omega = \frac{pH}{R \text{ sen. } \alpha - L\pi} \qquad (19)$$

20. Cuando se calcula un proyecto, estas fórmulas darán todos los elementos necesarios para redactarlo; pero al pasar á la ejecucion, es indispensable reducirlas á trazados fáciles aplicables á la montea de la obra.

Siendo OP_N (fig. 19) una longitud que represente el peso que actúa en toda la semiabertura de la cadena, si desde el punto P_N trazamos una recta que haga con la horizontal un ángulo α cuya tangente es $\frac{2f}{H}$, la distancia OQ será la componente Q: si tomamos ahora $Qh = h$ y levantamos una perpendicular, tomamos tambien sobre la recta OP_N distancias $OP_1 = ph$, $OP_2 = 2ph$..... y unimos los puntos P_1, P_2, etc. con el Q, las rectas QO, QP_1, QP_2, QP_3.....QP_N, representarán las tensiones de los lados del polígono, la mayor de las cuales será QP_N; la longitud de cada lado será Qh, Ql_1, Ql_2.....Ql_N, y la diferencia primera de las ordenadas las rectas hl_1, hl_2, hl_3.....hl_N. Con estos datos podremos construir el polígono $Ol_1\ l_2$.....l_n (fig. 20), porque se conocen la magnitud y direccion de cada lado. Pero este procedimiento, fundado en la propiedad que tienen las fuerzas en equilibrio de cerrar triángulos, y que mencionamos por ser aplicable á todos los casos de distribucion de carga que se pueden presentar, no es bastante expedito para el presente, en el que hemos de marcar desde luego, no los incrementos, sino las ordenadas mismas. Para obtenerlas, observaremos en la fórmula (8) y en el cuadro del núm. 10, que valores de y crecen como los cuadrados de los números impa- por lo que si sobre una horizontal (fig. 21) se toman distan- $(1)^2$, $O(3)^2$, $O(5)^2$, $O(7)^2$, etc., y sobre la última $O(11)^2$, se una perpendicular igual á la flecha f, la recta Of cortará ordenadas levantadas por los puntos de division segun las tudes pedidas de las péndolas. Si además se quiere trazar la se refiere cada ordenada á los puntos 1, 2, 3.....6 á que responde en la figura del puente, resultando los y_1, y_2, y_3.....y_6. La longitud de cada lado ó arco de la curva puede obtenerse to-

mando en cada division la distancia h, por ejemplo en la $(9)^2$, y por la perpendicular hl_6, tendremos la longitud $l_5\ l_6 = y_5\ y_6$.

21. La longitud constante que se ha de añadir á cada péndola se obtiene trazando á una distancia O O' una paralela á la $O(11)^2$ y la parte correspondiente á la curvatura del tablero por una recta O' f' análoga á la anterior y en sentido inverso. Así se tienen en una misma línea las tres partes, y por consiguiente el total de la longitud de cada péndola.

22. Hasta ahora se ha supuesto que la curva es simétrica: cuando los puntos de apoyo no estén á una misma altura, bastará conocer su vértice para considerarla dividida en este punto en dos partes de abertura y flecha distintas cada una. Este problema se resuelve con mucha facilidad sabiendo de antemano la naturaleza de la curva. Lo más frecuente es que conociendo los puntos de suspension A, B, (fig. 22) se tenga la horizontal tangente ab, y entónces la media proporcional $OC = aC' = ac$ entre Aa y $aB' = Bb$ nos da la posicion del vértice O. Siendo f_1 y f_2 las flechas conocidas Aa y Bb, y H la abertura ab, las semiaberturas Oa y Ob son respectivamente

$$H_1 = \frac{H\sqrt{f_1}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \quad \text{y} \quad H_2 = \frac{H\sqrt{f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}},$$

23. Por fin, en el caso frecuente de que el punto de apoyo A (fig. 23) esté algo distante de la primera péndola aa', toda la parte de cable comprendida Aa queda de figura rectilínea y la semiluz y la flecha se encuentran disminuidas en las cantidades Ab, ab. Como esto puede inducir á error cuando sea la distancia Ab considerable, es preciso conocer á qué quedan reducidos los elementos del trazado y del cálculo de la curva. Sea a el espacio conocido Ab; H, f, las distancias dadas AC, CO; la semiluz verdadera ac será

$$H' = H - a$$

y siendo

$$ab = a \text{ tang. } \alpha = \frac{2f'a}{H'},$$

$$f'=f-\frac{2a}{H'}f', \quad \text{ó} \quad f'=f\frac{H-a}{H+a}.$$

Por la ecuacion de la parábola de flecha f, la longitud de la ordenada $a'a$ sería

$$y=f\frac{(H-a)^2}{H^2}=f'.\left(1-\frac{a^2}{H^2}\right)$$

en lugar de ser f', lo cual hace ver la influencia desfavorable que este error ejerce en la determinacion de la longitud de las péndolas, que puede llegar fácilmente á valer algunos milímetros.

ARTÍCULO III.

De la curva real de equilibrio de las cadenas de un puente colgado.

24. Aunque la curva que afectan los cables se aproxima mucho á la parábola, y aún se confunde sensiblemente con ella en los puentes de pequeña luz, cuando ésta aumente puede separarse bastante de esa forma y ofrecer diferencias que debemos estudiar, para conocer cuáles son apreciables y deben tenerse en cuenta.

La resolucion directa del problema sería sumamente difícil, pero sabiendo que la curva ha de diferir muy poco de la parábola, supondremos que los pesos del cable y de las péndolas son los correspondientes á un cable parabólico de igual flecha y abertura, en lo que se comete un error despreciable, y entónces veremos qué variaciones notables ofrece respecto de esta última la curva real de equilibrio.

25. El peso P correspondiente á un punto cualquiera m (figura 18) se compone de tres partes. La principal y preponderante es el peso px que obra proporcionalmente á la abscisa, y en el que están comprendidos el peso del tablero, el de la carga y el de la parte de péndolas que está entre las horizontales Ox, $O'x'$.

La segunda es el peso de la parte variable de las péndolas

desde O hasta m. Llamando π al peso específico del hierro, ω á la seccion constante de todas las péndolas, y S á la suma de sus longitudes hasta m, el peso que se busca es (13) y (14).

$$\pi\omega S=\pi\times\frac{p'h}{R}\times\frac{y+y'}{3}\left(n+1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

en la cual son p' el peso total por metro que se adopta para el cálculo de las péndolas, y é y' las ordenadas en el punto m del cable y del tablero, y n el número de órden que ocupa la péndola en m.

Poniendo por n, y é y' sus valores en x (9), resulta

$$\pi\omega S=\pi\times\frac{p'(f+f')x}{3RH^2}\left(x^2+\tfrac{3}{2}xh+\tfrac{1}{2}h^2\right);$$

expresion que podriamos desde luego introducir en nuestras ecuaciones; pero para simplificarlas sin dañar á la exactitud, dándoles al mismo tiempo más generalidad, prescindiremos de la repartícion especial de las péndolas, suponiéndolas continuas en todo el puente, lo que equivale á hacer á h infinitamente pequeño, en cuyo caso la fórmula se reduce á

$$\pi\omega S=\tfrac{1}{3}\pi\frac{p'(f+f')}{R}\frac{x^3}{H^2}$$

La expresion

$$\tfrac{1}{3}\pi\frac{p'(f+f')}{R}H$$

representa el peso de todas las péndolas de medio puente: designándolo por τ, se tiene para el peso de la parte variable de las péndolas desde O hasta m

$$\tau\frac{x^3}{H^3},$$

que es la forma en que acostumbra á presentarse.

La última parte es el peso del arco Om, que considerado como parabólico y llamando σ al peso de la unidad de longitud, será (15)

$$\sigma x\left(1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{fx}{H^2}\right)^2\right)$$

26. Sabiendo el valor de P, la ecuacion de la curva se deduce de la diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{Q}\left[(p+\sigma)x+\left(\tau+\tfrac{2}{3}\frac{\sigma f^2}{H}\right)\frac{x^3}{H^3}\right]$$

Llamando p_1H al peso del tablero con sus cargas, aumentado del de una longitud de cable igual á la suya, y p_2H al peso total de la parte variable de las péndolas, con el del cable que sobra del término anterior, resulta

$$p+\sigma=p_1,\ \tau+\tfrac{2}{3}\frac{\sigma f^2}{H}=p_2H$$

y la ecuacion diferencial se escribe más sencillamente así:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{Q}\left[p_1x+p_2\frac{x^3}{H^2}\right]$$

que da para la *ordenada*

$$y=\frac{1}{2Q}\left[p_1x^2+p_2\frac{x^4}{2H^2}\right], \qquad (20)$$

para la *tension horizontal*

$$Q=\frac{H^2}{2f}\left[p_1+\tfrac{1}{2}p_2\right], \qquad (21)$$

y para la *longitud* de medio cable

$$L=H\left[1+\tfrac{2}{3}\frac{f^2}{H^2}\left(1+\tfrac{1}{5}\frac{p_2}{p_1}\right)\right] \qquad (22)$$

despreciando los cuadrados de la fraccion $\frac{p_2}{p_1}$ respecto de la unidad; porque esta fraccion valdria con nuestros datos 0,015, y nunca puede pasar de 0,03.

27. La importancia práctica de estas fórmulas se deduce de su comparacion con las que se hubieran establecido suponiendo la curva parabólica, que son

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{(p_1+p_2)x}{Q'}$$

$$y'=\frac{(p_1+p_2)x^2}{2Q'}$$

$$Q'=\frac{(p_1+p_2)H^2}{2f}$$

$$L'=H\left(1+\tfrac{2}{3}\frac{f^2}{H^2}\right).$$

Empezando por la última, observaremos que es inútil apreciar la fórmula (22), porque la diferencia sobre su análoga es

$$L-L'=\tfrac{2}{3}\frac{f^2}{H}\cdot\tfrac{1}{5}\frac{p_2}{p_1}$$

cantidad tan pequeña que en nuestro ejemplo no vale 5 milímetros.

Tampoco la fórmula (21) es por sí digna de atencion, porque la diferencia de empujes es

$$Q-Q'=-\tfrac{1}{2}p_2\frac{H^3}{2f},$$

que disminuye solo en siete milésimas el valor de Q y la seccion

del cable. Mucho más pequeña es la influencia que tiene esta fórmula en el valor de $\frac{dy}{dx}$ comparado con su análogo; pero no sucede lo mismo con la fórmula (20), expresion más aproximada de la ordenada, que puede diferir en algunos centímetros de la parabólica, y en la cual es indispensable apreciar con entera exactitud el valor de Q.

28. Se acostumbra en los proyectos á calcular las péndolas corrigiendo las ordenadas de la curva parabólica por medio de las diferencias de su ecuacion con la (20); pero es más expedito discutir directamente esta misma ecuacion. Si hacemos

$$y'=\frac{p_1}{2Q}x^2, \qquad y''=\frac{p_2}{2Q}\cdot\frac{x^4}{2H^2};$$

la ecuacion (20) se reduce á

$$y=y'+y'';$$

y llamando f_1 y f_2 á los valores de y' é y'' para $x=H$, resulta

$$y'=f_1\frac{x^2}{H^2}, \qquad y''=f_2\frac{x^4}{H^4} \qquad (23)$$

ecuaciones de dos parábolas, una de segundo grado y otra de cuarto, de la misma amplitud H y con las flechas f_1 y f_2 respectivamente. Los valores de estas flechas se deducen de las relaciones

$$f=f_1+f_2, \qquad \frac{f_2}{f_1}=\frac{p_2}{2p_1}, \qquad (24)$$

y el cálculo de la primera ecuacion (23) se efectua conforme se ha dicho (10), quedando como correccion de ésta la segunda de dichas ecuaciones.

29. La utilidad de las construcciones gráficas resalta más en esta curva, cuya ecuacion es más compleja. Para aplicarlas se empezará por dividir la flecha BA (fig. 24) en dos partes que

guarden las relaciones (24) entre sí, y que serán respectivamente la f_1 y f_2 de las últimas ecuaciones. Haciendo como ántes (9)

$$x=\left(n-\frac{1}{2}\right)h,$$

las ecuaciones (23) se presentan en esta forma

$$y'=\frac{f_1}{4H^2}(2n-1)^2 \qquad y''=\frac{f_2}{16H^4}(2n-1)^4,$$

Tomando luego sobre una recta oM (fig. 25) distancias proporcionales á los cuadrados de los números impares, y la distancia f' en la última division desde B hasta A', la recta OA' da las ordenadas y_1', y_2', y_3', etc. de la primera curva (20). Llevando á continuacion $A'A=f''$, y trazando una parábola de segundo grado OCA, cuyos diámetros conjugados sean OA y OD, tendremos del mismo modo las ordenadas y_1'', y_2'', y_3'', etc. de la segunda curva, contadas desde OA', y las longitudes de las péndolas serán

$$\begin{aligned}
y_1 &= (1)^2 y_1' + y_1' y_1'' = (1)^2 y_1'' \\
y_2 &= (3)^2 y_2' + y_2' y_2'' = (3)^2 y_2'' \\
y_3 &= (5)^2 y_3' + y_3' y_3'' = (5)^2 y_3'' \\
&\vdots \\
y_6 &= (11)^2 y_6' + y_6' y_6'' = (11)^2 y_6'',
\end{aligned}$$

Trasladando los puntos y_1'', y_2''..... á las péndolas correspondientes, se podrá trazar la curva real de equilibrio $Oy_1\,y_2\,y_3$.....A (fig. 24.)

30. La construccion de la parábola OCA se hace sin dificultad porque se conocen la tangente OA' en O, y la tangente en A, que se obtiene uniendo este punto con el E, medio de OA'. La pequeñez de la máxima ordenada de esta curva, que en nuestro ejemplo no llega á 12 centímetros, hace suficiente que se conozcan cuatro ó cinco puntos de ella, los que se pueden obtener, bien por medio de las intersecciones de las rectas que desde O y A se dirijan á puntos de igual division en las tangentes, bien construyendo polígonos circunscritos de doble número de lados.

31. Siendo OA la transformada de una parábola de igual flecha y luz que la curva real, cuya transformada es OCA, podemos comparar en ellas las propiedades de las curvas primitivas. Como OA es cuerda de la parábola OCA, la mayor desviacion entre ambas líneas en sentido paralelo al diámetro OD tendria lugar en el medio F de la cuerda, donde la distancia FC es la mitad de FE, ó sea la cuarta parte de AA'. La ordenada del punto F es $\frac{1}{2}$ BA, por consiguiente la curva de la figura 24 tiene su mayor separacion de la parábola en el punto de ésta en que

$$y = \tfrac{1}{2} f \qquad \text{ó sea} \qquad x = \frac{H}{\sqrt{2}}$$

y esa desviacion máxima es

$$\Delta = \tfrac{1}{4} f_2.$$

32. Además de ser más sensibles las diferencias de longitud de las péndolas, que las de los demas elementos, es más importante el exacto arreglo de su dimension ántes de colocarlas en obra, porque las deformaciones que resulten de una falta de esta clase en el tablero, no se corrigen sino corriendo más ó ménos las tuercas del estribo que abraza la vigueta, y como éstas no están tan libres que el movimiento de una no tenga influencia en la inmediata, es imposible que al hacerse las correcciones se dejen igualmente tirantes todas las varillas, y de esto resulta un estado violento que no puede aparecer á la vista hasta que el exceso de tension rompe ó deforma algunas de ellas con grave peligro del puente.

33. De las consideraciones expuestas en este capítulo se deduce que las ecuaciones de la cadenaria solo servirán para calcular la longitud, flecha y dimensiones de las bambas de servicio, y la flecha de fabricacion del cable; las de la parábola para la longitud, tension y grueso de los cables, y las de la curva real de equilibrio para construir la longitud de las péndolas, á no ser que el puente sea de pequeñas dimensiones, en cuyo caso será tambien suficiente suponer que se confunde con la parábola.

CAPÍTULO II.

De los apoyos.

34. Cuando se puede disponer de un macizo, natural ó artificial, capaz de resistir por sí solo á la tension horizontal de los cables de un puente, no es menester más que asegurar la íntima union de éstos con aquel para la completa estabilidad de la obra. Pero esto suele suceder raras veces, siendo la disposicion más general que se sujeten á un pilar ó apoyo, con un fiador que se introduce en el terreno, y éste es el que sirve las más veces de verdadero estribo.

35. Sea A (fig. 26) el punto de suspension de un cable cuya tangente es AT, AF el fiador sujeto invariablemente en el punto F y AB el apoyo. Sean β el ángulo que forma AF con la horizontal y θ el que forma AB con la vertical, F la tension del fiador y G la presion que sufre el apoyo AB. Las fuerzas T, F y G, que concurren en el punto A deberán hacerse mútuamente equilibrio, para lo cual es preciso que dada T, que se conoce por el capítulo anterior (17), las resistencias del fiador y del apoyo sean

$$F = T \frac{\cos.\,(\alpha + \theta)}{\cos.\,(\beta - \theta)} \qquad (25)$$

$$G = T \frac{\text{sen.}\,(\alpha + \beta)}{\cos.\,(\beta - \theta)} \qquad (26)$$

que nos indican, al mismo tiempo que la menor resistencia que deberán tener la cadena ó cable AF y el apoyo AB, las reacciones

que sufrirán los puntos F, B del terreno ; de este modo se arreglarán las dimensiones de una y otra pieza.

Las fórmulas y la figura nos indican que cuanto mayor sea β ó θ más pequeño, tanto mayor será la tension del fiador y la presion del apoyo, llegando á ser infinitas cuando sus dos direcciones se confundan. Lo contrario sucede si β disminuye ó θ aumenta.

36. Las longitudes de AF y AB dependen de la magnitud de los ángulos β y θ, y como su seccion trasversal depende de los mismos ángulos, pero de diferente modo, puede ser conveniente saber cuál será la direccion en que su volúmen sea un mínimo, y por consiguiente más económico su establecimiento. Dichas longitudes son, llamando a á la altura de A sobre la horizontal FB

$$AF = \frac{a}{\text{sen. } \beta}, \qquad AB = \frac{a}{\cos. \theta},$$

y como el área de la seccion trasversal depende de los valores de F y G, el volúmen será proporcional respectivamente á las expresiones

$$\frac{1}{\text{sen. } \beta \cos. (\beta - \theta)}, \qquad \frac{1}{\cos. \theta \cos. (\beta - \theta)},$$

que serán un mínimo cuando AF divida en dos partes iguales el ángulo CAB ó AB divida del mismo modo el ángulo DAF. Pero este resultado no tiene uso práctico, porque otras consideraciones, como la fácil construccion del apoyo y el amarrado del fiador obligan á disminuir los ángulos considerablemente.

37. Para que todas estas relaciones sean ciertas, es preciso que el fiador esté unido al apoyo independientemente de la cadena ; pero puede suceder que no se verifique así, sino que el fiador sea la prolongacion de ésta, simplemente apoyada en el punto A. Entónces, no considerando el rozamiento que puede desarrollar la parte de cadena que está en contacto con el apoyo cuando tienda á ejecutar un movimiento cualquiera, es evidente que la tension T se trasmitirá íntegra al fiador y se tendrá

$$F = T :$$

como la resultante de estas dos fuerzas iguales será bisectriz del ángulo FAT, si el apoyo está articulado en el punto B no podrá estar en equilibrio si no son iguales los ángulos FAB, BAT, y siendo esta posicion inestable á causa de la movilidad de la obra, es inadmisible un apoyo articulado sin que el fiador esté sujeto á él.

38. Es, pues, necesario en tal caso un apoyo fijo ABDC (figura 27) que suele terminarse por una curva AC tangente en sus extremos á AT y FC. La resultante EG formará siempre ángulos iguales con las componentes, y su valor será

$$G = 2T \text{ sen. } \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

y sus componentes, horizontal y vertical,

$$T (\cos. \alpha - \cos. \beta), \qquad T (\text{sen. } \alpha + \text{sen. } \beta).$$

Si el eje del apoyo tiene la direccion de la resultante EG, bastará que pueda resistir á esa presion ; pero por lo que acabamos de decir, este caso no se presenta en la práctica, porque la direccion de la resultante varía continuamente á causa de la movilidad de la construccion que aumenta ó disminuye el ángulo TAD (figura 26), por lo cual siempre que sea independiente la cadena continua FCAM (fig. 27) del apoyo, éste debe poder resistir á una accion oblicua á su eje, cuya direccion é intensidad dependen de las de las tensiones de CF y AT.

39. Consideremos ahora el rozamiento que hay en la extension AC al tiempo de moverse la cadena hácia M con el fin de equilibrar la tension en sus dos ramas. El efecto del rozamiento será disminuir la tension de CF, que resultará menor que T : si el movimiento tuviera lugar en sentido contrario, por efecto de una contraccion del fiador ú otra causa cualquiera, la tension F se encontraria aumentada en la misma proporcion en que ántes es-

taba disminuida. En ambos casos la intensidad y direccion de la resultante varían. Para apreciar estos efectos, observaremos que cuando un hilo flexible se apoya en una superficie curva, su tension en cada punto guarda con la presion que el mismo ejerce la proporcion del rádio de curvatura del hilo con la unidad: llamando t á la tension variable de los elementos de la curva AC, s á la longitud del arco contada desde A, ρ al radio de curvatura, y r á la relacion del rozamiento á la presion para las materias que componen el cable y el apoyo, la presion por unidad de longitud en un punto cualquiera habrá de ser, por lo que acabamos de decir,

$$\frac{t}{\rho},$$

en la extension del elemento ds será

$$\frac{tds}{\rho}$$

y el rozamiento que esta presion ocasiona

$$r\frac{tds}{\rho},$$

por consiguiente, la tension que queda á la cadena en el punto que se considera, estará disminuida de la cantidad

$$dt = -rt\frac{ds}{\rho}$$

y la tension efectiva se deducirá integrando esta expresion desde 0 á s, de lo que resulta

$$\text{l.}\frac{t}{T} = -r\int_0^s \frac{ds}{\rho},$$

y en el punto C, llamando S al arco AC

$$\text{l.}\frac{F}{T} = -r\int_0^S \frac{ds}{\rho}.$$

Siendo $\frac{d.s}{\rho}$ el ángulo de dos normales consecutivas, $\int_0^S \frac{d.s}{\rho}$ es el que forman las dos normales extremas CH y AH: llamando γ á ese ángulo CHA, se obtiene

$$\text{l.}\frac{F}{T} = -r\gamma$$

y

$$F = Te^{-r\gamma} \qquad (27)$$

siendo e la base de los logaritmos neperianos.

La tension F es menor y la magnitud de la resultante G será tambien más pequeña, pero aumentará su oblicuidad en el ángulo GEG', siendo GG' la diferencia de tension

$$T\left(1 - e^{-r\gamma}\right).$$

Si el apoyo es vertical, la presion disminuye, pero el empuje horizontal aumenta, lo que hace preciso aumentar el ancho de su base DB. Las componentes horizontal y vertical de G son ahora

$$T\left(\cos.\alpha - e^{-r\gamma}\cos.\beta\right), \qquad T\left(\text{sen.}\,\alpha + e^{-r\gamma}\,\text{sen.}\,\beta\right) \qquad (28)$$

40. Por el mismo método se demuestra que si el movimiento de la cadena tiende á hacerse de A hácia C, el fiador sufre una tension

$$F = Te^{r\gamma} \qquad (29)$$

que es la fórmula por la que se habria de calcular el grueso de este cable: la carga del apoyo aumenta disminuyendo su empuje horizontal.

41. Cuando este apoyo es una simple columna de hierro, ha de resistir á la presion que ocasiona la componente de G paralela á su eje, y á la flexion á que está solicitado por la otra componente perpendicular. En el caso en que sea una pila de fábrica, la resultante de su peso y de la fuerza G debe pasar entre los puntos D y B de la base y á cierta distancia de las aristas. Además de esto es preciso que la presion final que resulte en la base DB quede destruida por la resistencia del cimiento en que se apoya la obra.

42. Aunque bajo el punto de vista de la economía son preferibles los apoyos articulados en su punto más bajo, no es posible que el puente tenga la rigidez ni la seguridad convenientes si no se hacen pilas capaces de resistir á un esfuerzo horizontal algo considerable que provenga de las tensiones horizontales del fiador y de la cadena, ó de las cadenas de dos tramos adyacentes cuando la pila es intermedia. La buena construccion exige que el fiador y el cable sean de una pieza; y aunque el rozamiento aumente un poco el empuje contra la pila, es sin embargo más conveniente dejarlo subsistir para aumentar la rigidez de los arcos, que disminuirlo con rodillos, sectores, etc., cuya rotura ha ocasionado á veces la ruina de toda la obra.

43. La sujecion del punto F, que hemos supuesto indefinida, se obtiene por el amarrado del fiador en el interior del terreon, que puede hacerse de dos modos principales. Por el primero (figura 28), el fiador AF se introduce en su misma direccion en el terreno hasta cierta profundidad, en donde se termina por una placa MN: en este caso, la tension queda destruida por la componente paralela á ella del peso del volúmen de tierra que tiende á desprenderse de la masa total, y para calcular la profundidad á que ha de ponerse la placa, se buscará el sólido CMND de mínima resistencia del macizo de tierra, de modo que ésta sea doble por lo ménos que la tension F. Lo más desfavorable y sencillo es suponer nulo el rozamiento de las tierras. En tal caso, el sólido que tiende á desprenderse tiene la forma de un prisma cuyas aristas son paralelas á la direccion del fiador. Si se hace variar ésta en el punto F (fig. 29) es preciso además que la resultante de FA y FE quede destruida por la resistencia del terreno á la compresion.

44. La segunda disposicion consiste en asegurar el fiador á la

fábrica inferior de los cimientos (fig. 30). En este caso la fuerza F y el peso del macizo con su rozamiento y cohesion se han de hacer equilibrio en todas las líneas de rotura que se ensayen, y el punto F debe resistir las presiones que resulten de las tensiones de las partes AF y FH.

Los problemas que para el establecimiento de esta fábrica resulten pertenecen á la teoría de los macizos, y no daremos sobre ellos más pormenores. Muy variadas son las disposiciones que se observan en el amarrado de los puentes construidos; pero todas pueden reducirse á las dos anteriores, teniendo presente que los trozos de bóveda que se suelen hacer en el interior del terreno no tienen más objeto que aumentar la resistencia á la compresion en los puntos en que el cable de amarra muda de direccion. En el caso en que ésta se confie al macizo de tierra, se ha de ver si es posible que el terreno se inunde por las crecidas del rio, pues entónces el peso de las tierras disminuye y su cohesion y rozamiento se anulan.

CAPÍTULO III.

Determinacion de la flecha provisional del cable.

ARTÍCULO I.

Variaciones de flecha dependientes solo del cable.

45. Si entre dos puntos de nivel A, B (fig. 31) colocamos un cable suspendido y sin carga, la forma que afecte será una cadenaria, cuya flecha CO'' estará determinada por la abertura y la longitud. Si despues colocamos la carga permanente en ese cable, su forma se alterará y tomará la real de equilibrio A O' B que se puede considerar como una parábola ; este cambio habrá ocasionado un aumento en la flecha con que el cable se colocó, y por consiguiente, esta diferencia será menester restarla de la flecha proyectada para obtener la de colocacion. Además, una vez colocado el tablero, su peso extenderá en cierta longitud la primitiva de los elementos de la curva, cambiándola en otra AOB de mayor flecha y cuya diferencia junta con la anterior deberá restarse de la flecha del proyecto.

46. Para hacer estos cálculos es preciso saber ante todo el aumento de longitud que proviene de la elasticidad del cable y conocer qué alteracion causa en la flecha un aumento pequeño en la longitud. Como la curva de equilibrio se confunde sensiblemente con la parábola de igual flecha y luz, deducimos de la fórmula (16)

que dando un incremento pequeño λ á L, el correspondiente á f es con bastante aproximacion

$$\varphi = \tfrac{3}{4}\frac{H}{f}\lambda, \qquad (30)$$

resultado que nos indica que una variacion pequeña en la longitud puede ocasionarla muy grande en la flecha, como que en el proyecto tipo están en la proporcion de 1 á 5.

47. Veamos ahora qué alteracion producen en la longitud del cable AOB las tensiones originadas por una carga uniforme. Si llamamos s' al arco de longitud aumentada y s al de la primitiva, la relacion del alargamiento á la longitud primitiva en cada elemento será $\frac{ds'}{ds} - 1$, que deberá igualarse á la relacion de la tension por unidad de seccion trasversal al coeficiente de elasticidad de la materia de que se compone el cable. Siendo E este coeficiente, deberá verificarse la ecuacion

$$\frac{ds'}{ds} - 1 = \frac{t}{E\omega}$$

y poniendo en vez de t su valor en funcion de x (17) y reemplazando $d.s$ por su expresion ordinaria,

$$ds' - ds = \frac{Q}{E\omega}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx \qquad (31)$$

Pudiendo tomarse la curva AOB como una parábola, será fácil hacer la integracion, que da con toda exactitud

$$s' - s = \frac{Qx}{E\omega}\left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2fx}{H^2}\right)^2\right]$$

y para el alargamiento total

$$L' - L = \frac{QH}{E\omega}\left(1 + \tfrac{4}{3}\frac{f^2}{H^2}\right) \qquad (32)$$

En virtud de la ecuacion (30) el descenso del vértice de la curva será

$$\tfrac{3}{4}\frac{H^2}{f}\frac{Q}{E\omega}\left(1 + \tfrac{4}{3}\frac{f^2}{H^2}\right):$$

llamando b al descenso que ocasiona la unidad de peso por unidad de longitud, y poniendo por Q su valor (10) en H y f,

$$b = \tfrac{3}{8}\frac{H^4}{E\omega f^2}\left(1 + \tfrac{4}{3}\frac{f^2}{H^2}\right) \qquad (33)$$

y el aumento de flecha producido por una carga p por unidad de longitud es

$$\varphi = b\,p$$

48. El descenso ocasionado por una sobrecarga p' se obtendria sustituyendo p' en lugar de p en esta fórmula. Considerando á ω como proporcional á Q, estos descensos son aproximadamente como la fraccion $\frac{H^2}{f}$, de modo que son mayores cuando más grande es la luz ó menor la flecha.

49. Calculado el valor de L'—L para la curva AOB y restado de L, se obtiene la longitud del cable ántes de haberse dilatado sus elementos (*); y la flecha que corresponde á la cadenaria AO''B, de la misma longitud y abertura que la parábola AO'B sale de las ecuaciones (4) ó (5).

(*) La carga de prueba produce un alargamiento del cual, por causa de los asientos de la obra, queda permanente una tercera parte, segun los experimentos de Vicat y Leblanc. En este caso, á la longitud L'—L es preciso añadir

$$\tfrac{1}{6}\frac{p'}{E\omega}\frac{H^3}{f}\left(1 + \tfrac{4}{3}\frac{f^2}{H^2}\right)$$

siendo p el peso por unidad de longitud de dicha carga de prueba.

ARTICULO II.

Variaciones de flecha debidas al fiador.

50. La tension F que el peso de la obra produce en el fiador tambien lo dilata ocasionando un tercer aumento de flecha que será preciso descontar al marcar la provisional. Si llamamos l á la longitud de dicho fiador inclusas las amarras, el alargamiento final será

$$\frac{Fl}{E\omega} \qquad (31)$$

y cuando cable y fiador estén unidos por encima de un apoyo fijo, la fórmula (30) da el descenso del vértice de la curva

$$\varphi = \frac{3}{4}\frac{F}{E\omega}\frac{lH}{f} \qquad (33)$$

Designando por b_1 lo que vale este descenso cuando la carga por unidad de longitud del tablero es la unidad de peso, se tiene

$$\varphi = b_1 p$$

El aumento de longitud, añadido al propio del cable, se disminuirá de una sola vez de la longitud de éste para calcular la flecha cadenaria.

51. Por grande que sea la tension F no será capaz de mantener en línea recta al fiador, cuyo peso le hará tomar una ligera curvatura. Conviene conocer la diferencia entre su longitud y la de su cuerda, aunque como vamos á ver, este resultado no es de importancia para el estudio que se hace en este capítulo.

Notemos que por separarse poco el fiador de la línea recta, su peso se puede considerar como proporcional á la longitud de la cuerda AF (fig. 32) y la curva AOF como una parábola de eje vertical. La recta fO trazada verticalmente por el punto medio de la cuerda AF será un diámetro de esta parábola, y la tangente Ox

en O será paralela á AF. Tomando el punto O por orígen y por ejes las rectas Ox, Oy, si llamamos t la tension en el punto O, paralela á AF y σ el peso de la unidad de longitud de fiador, las ecuaciones (1) nos dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma x}{t},$$

de donde deducimos

$$y = \frac{\sigma}{2t}x^2$$

y si se representa por a la distancia DF, la flecha vertical Of se obtendrá haciendo

$$x = \frac{a}{2\cos.\,\theta},$$

y es

$$f = \frac{\sigma a^2}{8t\cos.^2\theta} \qquad (36)$$

cuya fórmula nos indica que cuanto mayor sea la tension que ha de sufrir el fiador, tanto menor será su flecha ó pandeo.

52. Para hallar con sencillez la diferencia de longitud entre AOF y AfF, supondremos que esta parábola se confunde sensiblemente con otra de la misma abertura y cuya flecha en sentido perpendicular á AF sea la proyeccion de Of sobre fO', procedimiento que conduce á la misma expresion que un cálculo exacto. Esa flecha es

$$O'f = \frac{\sigma a^2}{8\,t\cos.\,\theta};$$

la cuerda es

$$\frac{a}{\cos.\,\theta}$$

y sustituyendo estos valores en el de 2(L—H) sacado de la fórmula ([16]), resulta para la diferencia que se busca

$$\frac{1}{24}\,\frac{\sigma^2 a^3}{t^2 \cos.\,\theta} \qquad (37)$$

53. Sin error se puede tomar para t el valor de F dado por las fórmulas del capítulo II, pues difieren ámbos tan poco, que en nuestro ejemplo el exceso no llega á 4 milésimas de uno de ellos. Por si se quiere comprobar este resultado, daremos la fórmula de t. Trazando por el punto A la vertical AP y la tangente AT hasta que encuentren á la tangente Ox, el triángulo ATP tendrá sus lados AT, TP y AP proporcionales respectivamente á las tensiones en A, en O, y al peso de AO, que son F, t y $\frac{\sigma a}{2\cos,\theta}$, y como el ángulo APT es complemento de θ, la propiedad general de los triángulos oblicuángulos dará la expresion

$$F^2 = t^2 + \left(\frac{\sigma a}{2\cos.\theta}\right)^2 + t\,\frac{\sigma a}{\cos.\theta}\,\text{sen.}\,\theta,$$

de la que se deduce

$$t = -\frac{\sigma a}{2}\,\text{tang.}\,\theta + \sqrt{F^2 - \left(\frac{\sigma a}{2}\right)^2}.$$

54. Hemos dicho ántes que el efecto del pandeo es insensible en la flecha del cable. Cuando éste se fabrica en su posicion definitiva, varios caballetes que marcan la direccion AfF sostienen los hilos del fiador y lo dividen en un número n de partes, cada una de las cuales toma una curvatura semejante á AOF. Designando por t' la tension que corresponde á estas curvas, que es debida solo al peso σ propio del cable, el exceso de longitud de cada una sobre su cuerda será

$$\frac{1}{24}\,\frac{\sigma^2 a^3}{t'^2 n^3 \cos.\,\theta}$$

y el de las n curvas

$$\frac{1}{24}\,\frac{\sigma^2 a^3}{t'^2 n^2 \cos.\,\theta}.$$

Cuando se hayan quitado los caballetes y colocado todo el peso p en el cable, el exceso correspondiente á AOF está dado por la fórmula ([37]), y la alteracion de longitud del cable, producida por la diferencia entre ambos excesos será

$$\frac{\sigma^2 a^3}{24\,t^2 \cos.\,\theta}\left(1 - \frac{t^2}{n^2 t'^2}\right) = \frac{\sigma^2 a^3}{24\,t^2 \cos.\,\theta}\left(1 - \frac{p^2}{n^2 \sigma^2}\right). \qquad (38)$$

En nuestro ejemplo, $\frac{p}{\sigma}$ vale muy cerca de 4, de modo que si se colocan tres caballetes intermedios, la diferencia de longitudes del fiador ántes y despues de su fabricacion es materialmente nula.

ARTICULO III.

Variaciones debidas á la movilidad del apoyo.

55. En el artículo anterior hemos examinado el caso en que las variaciones del fiador se trasmiten íntegras á la cadena, que es lo más frecuente; pero cuando el apoyo no puede sufrir una accion oblicua á su eje, el fiador ya no es prolongacion de ella, y sus alteraciones hacen que la extremidad superior del apoyo se mueva horizontalmente, variando la flecha por las variaciones de la abertura y no de la longitud, que permanece la misma (*).

56. La fórmula que liga el aumento de abertura con la disminucion de flecha es con aproximacion suficiente,

$$\varphi = \frac{3}{4}\,\frac{L}{f}\,\eta, \qquad (39)$$

(*) Esta discusion no interesa al cálculo de la flecha provisional, porque el cable no se fabrica en su sitio con apoyos movibles; pero la colocamos aquí por su analogía con las anteriores.

siendo η el aumento de abertura, que se deduce como la (30) de la (16).

57. Suponiendo que el apoyo AB (fig. 33) es vertical, segun se acostumbra, el alargamiento total λ' del fiador que está representado por Aa hace tomar al punto A la posicion A', y como los arcos del círculo A'a, A'A, cuyos centros están en F y B, se confunden sensiblemente con sus tangentes en a y A, la separacion AA' es

$$AA' = \frac{Aa}{\cos.\ a\ AA'}$$

ó

$$\eta = \frac{\lambda'}{\cos.\ \beta} \qquad (40)$$

El valor de λ' se calculará por la misma fórmula (34) y si se quiere además por la (38), poniendo el valor de F (25) que ahora conviene.

CAPÍTULO IV.

Variaciones accidentales de la flecha definitiva.

ARTICULO I.

Influencia de las variaciones de temperatura.

58. Por ser el hierro una sustancia muy dilatable por el calor, las variaciones ordinarias de la temperatura deben alargar ó acortar sensiblemente las partes de que se compone el puente, y su efecto principal es alterar la flecha definitiva con que se ha establecido el cable.

59. El alargamiento de un cuerpo prismático es proporcional á su longitud y al número de grados que la temperatura se eleva. Siendo δ el coeficiente de dilatacion para un grado de temperatura, resulta que cada unidad de longitud del cable, del fiador ó de los apoyos se dilatará en la cantidad δo, siendo o el número de grados que mide la diferencia de temperaturas, y dando á δ el valor que segun la materia de que estén compuestos les corresponda. Multiplicando este factor por la longitud respectiva, obtendremos los alargamientos λ, λ_1, λ_2 correspondientes al cable, al fiador y al apoyo.

60. Empecemos por el caso en que siendo el apoyo móvil, la cadena y el fiador están unidos á su extremo superior A (fig. 34). Si

$$\lambda_1 = Aa, \qquad \lambda_2 = Aa'$$

el efecto de las dos dilataciones simultáneas será trasladar el punto A á A', interseccion de los arcos de círculo que trazarian los

puntos a, a', y que se confunden sensiblemente con las perpendiculares $a'A'$, aA'. La distancia $a'A'$, en que se disminuye la luz por esta causa, es

$$\eta = Ab - cb = \frac{\lambda_1}{\cos.\ \epsilon} - \lambda_2 \text{ tang. } \epsilon$$

y la flecha habrá aumentado por esta causa la cantidad (39)

$$\frac{3}{4}\,\frac{L}{f}\left(\frac{\lambda_1}{\cos.\ \epsilon} - \lambda_2 \text{ tang. } \epsilon\right).$$

61. Por el aumento de longitud del cable habrá otro (30)

$$\frac{3}{4}\,\frac{H}{f}\,\lambda$$

siendo el total debido á estas tres dilataciones

$$\frac{3}{4}\left[\frac{H}{f}\lambda + \frac{L}{f\cos.\ \epsilon}\lambda_1 - \frac{L \text{ tang. } \epsilon}{f}\lambda_2\right] \qquad (41)$$

y como todos los puntos de la curva se elevan la distancia Aa', el descenso total del medio del arco será

$$\varphi = \frac{3}{4}\,\frac{H}{f}\lambda + \frac{3}{4}\,\frac{L}{f\cos.\ \epsilon}\lambda_1 - \left(\frac{3}{4}\,\frac{L \text{ tang. } \epsilon}{f} + 1\right)\lambda_2 \qquad (42)$$

62. Si la posicion del tablero fuese la recta BB', por efecto del descenso (41) tomaria la figura parabólica BDB', y por el alargamiento vertical Aa', esta curva se trasportaria á bdb', separando los bordes del nivel de las avenidas; pero las péndolas sufrirán tambien una dilatacion que irá aumentando desde el centro en que será muy pequeña, hasta los extremos en que será casi igual á la de los apoyos; por lo cual la curva del tablero se trasformará en la BD'B', cuya flecha será la anterior aumentada de la dilatacion de la péndola central, que es

$$\delta oe. \qquad (43)$$

Por esta razon, para que el tablero no baje nunca de la horizontal, es preciso darle un bombeo de forma parabólica, cuya flecha sea $\varphi + \delta oe$, dando á o el mayor valor que pueda tener en la localidad la diferencia entre el máximo de la temperatura en el año, y el medio en que el proyecto se calcula.

63. Si la cadena está solo apoyada sobre la pila, el alargamiento del fiador se trasmite al claro y resulta un alargamiento total

$$\lambda + \lambda_1\,;$$

pero si se dilata tambien el apoyo, el fiador habrá de aumentar en la cantidad

$$\lambda_2 \text{ sen. } \epsilon,$$

por consiguiente, el alargamiento total es

$$\lambda + \lambda_1 - \lambda_2 \text{ sen. } \epsilon,$$

el descenso del vértice de la curva

$$\frac{3}{4}\,\frac{H}{f}(\lambda + \lambda_1 - \lambda_2 \text{ sen. } \epsilon)$$

y el del centro del tablero

$$\frac{3}{4}\,\frac{H}{f}(\lambda + \lambda_1 - \lambda_2 \text{ sen. } \epsilon) - \lambda_2 + \delta oe. \qquad (44)$$

64. Si el fiador hubiera de rozar sobre la pila para moverse de un lado á otro cuando se dilata ó se contrae, su tension no será constante, y oscilará entre los límites (27) y (29) del capítulo 2.°, produciendo en el apoyo un empuje horizontal en uno ú otro sentido expresado por la fórmula (28). Si ambas piezas se han calculado con las reglas dadas allí, estaremos seguros de que los

cambios de temperatura no influirán en la resistencia de las piezas de la obra.

65. No todo el alargamiento λ_1 se trasmite al cable del modo que indican las fórmulas anteriores, porque una parte de él, si bien tan pequeña que en la práctica no merece calcularse, se consume en disminuir la tension elástica del fiador y aumentar su pandeo, efecto del menor valor que su tension F adquiere. Débese esta disminucion á dos causas: una, despreciable, es lo que varía la tension T del cable por el aumento de flecha, y otra, el rozamiento que origina el paso del fiador sobre la pila fija, si es que éste se encontraba ántes en perfecto equilibrio. En este último caso, F=T, y despues de hecho el movimiento, $F=Te^{-r\gamma}$, siendo la diferencia de las dilataciones elásticas de ambos

$$\frac{Tl}{E\omega}\left(1-e^{-r\gamma}\right)$$

cantidad que habrá de rebajarse de λ_1. En cuanto al aumento de pandeo y la disminucion de T, se pueden considerar sus efectos como nulos, y al despreciarlos se favorece la solidez de la obra. Y de todos modos, el roce de las cadenas sobre las pilas aumenta su rigidez, y es ventajoso, aún cuando ocasione alguna pequeña fatiga en los apoyos y fiadores.

66. Segun queda dicho, los efectos del viento y de las vibraciones que tienden á levantar el tablero, se anulan poniendo por debajo de éste un cable inverso A'O'B' (fig. 35) sujeto á él por péndolas *nm'* que forman la continuacion de las ordinarias *mn*. Para que este sistema produzca siempre su efecto, es menester que cuando la temperatura sea más elevada haya en la péndola *mm'* alguna tension que solicite á los dos cables á unirse y mantenga al A'O'B' estirado en la forma parabólica que le corresponde; y por otra parte, aunque la temperatura baje á su mínimo, el aumento de tension que produce en los dos cables lo invariable de la distancia *mm'* no ha de ser tal que comprometa su resistencia. Y notaremos de paso que se considera esa distancia invariable, porque los efectos del cambio de temperatura y de tension

en las péndolas, que se compensan en parte, son muy pequeños.

67. Para hacer el cálculo más sencillo, y porque conduce al mismo resultado, supondremos que los cables AOB, A'O'B' ocupan las posiciones que corresponden á la temperatura más elevada, siendo t' la menor tension por unidad de longitud horizontal que entónces ha de ejercer la parte *nm'* de las péndolas. Cuando la temperatura haya llegado á su mayor descenso, la flecha f del primer cable habrá disminuido en cierta cantidad φ (63), pero como la tension t'' con que ambos se solicitan será mayor, toda la longitud GFAO se dilatará, aumentando la flecha en la cantidad

$$(b+b_1)(t''-t')$$

calculada por la fórmula (33) para el cable, y por la (35) para el fiador.

El efecto del pandeo de éste se puede despreciar por ser comparativamente muy pequeño y estar compensado por el exceso que se atribuye al último término de la expresion anterior al prescindir del rozamiento.

La flecha f' del segundo cable se disminuye por el descenso de temperatura en una cantidad análoga φ' y por la diferencia de tension aumenta en

$$b'(t''-t')$$

llamando b' á la variacion que produce la unidad de peso en este cable con arreglo á la fórmula (33).

La condicion para que el sistema sea eficaz es que la disminucion O*a* sea igual al aumento O'*a'*, lo que conduce á la ecuacion

$$\varphi-(b+b_1)(t''-t')=b'(t''-t')-\varphi'$$

de donde se saca

$$t''-t'=\frac{\varphi+\varphi'}{b+b_1+b'}, \qquad (45)$$

fórmula cuyos términos se han tenido ya que calcular con otros objetos.

68. Este aumento de tension en las péndolas producirá un aumento análogo en los dos cables, cuya expresion será para el primero

$$\frac{(t''-t')\,H^2}{2f}\sqrt{1+\frac{4f^2}{H^2}}$$

y para el segundo

$$\frac{(t''-t')\,H'^2}{2f'}\sqrt{1+\frac{4f'^2}{H'^2}}$$

y lo que el esfuerzo por unidad de seccion tenga que crecer en cada uno será respectivamente

$$\rho=\frac{t''-t'}{\omega}\,\frac{H^2}{2f}\sqrt{1+\frac{4f^2}{H^2}},\quad \rho'=\frac{t''-t'}{\omega'}\,\frac{H'^2}{2f'}\sqrt{1+\frac{4f'^2}{H'^2}}.\ (45)$$

Por lo comun la primera expresion es poco apreciable; pero sucede lo contrario con la segunda, que forma la parte principal del esfuerzo del cable inverso.

69. Examinando las fórmulas (45) y (46) se ve que cuanto mayores sean ω' y f' mayores son las variaciones en la tension de los cables y en la traccion que el inferior ejerce en el tablero; pero la seccion que éste necesita para resistir á una fraccion dada se hace menor. Conviene, pues, dar al cable inverso la mayor flecha que sea compatible con la eficacia de sus esfuerzos para que el sistema no carezca nunca de la necesaria rigidez á todas temperaturas.

ARTICULO II.

De las variaciones producidas por una carga accidental.

70. Si á un cable parabólico en equilibrio bajo la accion de un peso p por unidad de proyeccion horizontal, se suspende un

peso P en un punto m (fig. 36), la forma del cable variará presentando en ese punto un ángulo finito, y alterando la figura de las dos partes Am, mB, que sin embargo seguirán siendo parabólicas. Este fenómeno, que se verificará indispensablemente siempre que una carga cualquiera atraviese el puente, nos interesa de dos maneras: por el aumento de tension que sufren los cables y los apoyos, y por el descenso del punto correspondiente del tablero. Un aumento en las dimensiones de estas partes resistiria los efectos del aumento de tension, si la carga de prueba no los produjera siempre superiores; pero la deformacion del tablero no puede evitarse, y solo por un bombeo mayor que el que corresponde á la variacion de temperatura se puede evitar que tome una curvatura inversa.

71. Para aplicar las formulas (1) es preciso saber ántes la posicion del punto más bajo de la curva. Sea D este punto, y llamemos a á la abscisa OE, siendo O el orígen y el punto medio de AB. La componente vertical de la tension en el punto B es

$$p(H-a)+P$$

y la presion vertical en dicho punto B, resultado de la descomposicion del peso total que actúa en el claro entre las dos verticales que pasan por A, B, es

$$pH+P\left(\frac{H+x'}{2H}\right).$$

siendo x' la abscisa OG; de donde resulta, teniendo que ser las los idénticas

$$a=\frac{P(H-x')}{2pH}\qquad (47)$$

72. Sabiendo la posicion del punto D, podemos obtener la cuacion de cualquiera de las dos curvas, que será para la parte Am

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p(x-a)}{Q'},$$

$$y=\frac{p}{2Q'}(x+H)(H-x+2a) \qquad (48)$$

y para la parte Bm

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p(x-a)+P}{Q'}$$

$$y=\left[\frac{p}{2Q'}(x+H-2a)+\frac{P}{Q'}\right](H-x). \qquad (49)$$

El valor de Q', que es la nueva tension horizontal, se ha de deducir de la condicion de que la suma de las longitudes de los arcos Am, mB sea la misma ántes que despues de haber colocado el peso P en m. Esta condicion nos daria Q' en funcion de x'; pero como cualquiera que éste sea, la diferencia entre sus valores es pequeña, nos contentaremos con hallar el máximo, que corresponde al punto O, en que $x'=o$.

73. Si llamamos f' á la flecha CO' que entónces toma el cable (fig. 37), la mayor tension horizontal se deducirá haciendo $y=f'$, $x=o$ en las ecuaciones (48) y (49), y reemplazando a por su valor, resulta

$$Q'=\frac{pH^2+PH}{2f'}.$$

Para calcular f' aplicaremos la propiedad enunciada de que la longitud de la curva AO' ha de ser igual á la semilongitud del cable parabólico AO. La longitud de AO' se deduce de la fórmula (17), restando la comprendida desde el punto más bajo hasta el O' de la que hay entre dicho punto más bajo y el A, y es

$$L'=\frac{H+a}{\text{tang.}\,\alpha}\left[(\text{tang.}\,\alpha-\text{tang.}\,\mu)+\frac{1}{6}(\text{tang.}^3\,\alpha-\text{tang.}^3\,\mu)\ldots\right]$$

Sustituyendo por a su valor, las fórmulas (48) y (49) dan, haciendo sucesivamente $x=H$, $x=o$; para $x'=o$,

$$\text{tang.}\,\alpha=\frac{2f'}{H}\,\frac{2pH+P}{2pH+2P}, \qquad \text{tang.}\,\mu=\frac{2f'}{H}\,\frac{P}{2pH+2P}$$

y despreciando las potencias superiores á la primera de la fraccion $\frac{P}{2pH}$, comparadas con la unidad, la longitud de la curva AO' viene á ser

$$L'=H\left[1+\frac{1}{2.3}\left(\frac{2f'}{H}\right)^2\left(1-\frac{P}{2pH}\right)\right]$$

La longitud AO de la parábola primitiva era

$$L=H\left[1+\frac{1}{2.3}\left(\frac{2f}{H}\right)^2\right]$$

y como ambas deben ser iguales, sale con aproximacion suficiente

$$f'=f\left(1+\frac{P}{4pH}\right), \qquad (50)$$

mayor flecha que por el descenso debido á una carga accidental P puede tener el punto medio del cable.

De aquí se deduce el valor final de Q', que es aproximadamente

$$Q'=\frac{pH^2}{2f}\left(1+\frac{3P}{4pH}\right)$$

y se ve que el aumento de tension horizontal es el mismo que produciria un peso equivalente á $^3/_2$ P repartido en toda la longitud del puente.

74. La flecha φ del tablero correspondiente al aumento de temperatura, sumada á las diferencias que se deben al paso de la carga P, es la total que ha de afectar la parábola del tablero.

Estas diferencias provienen de dos causas: una, el cambio de figura de la cadena, y otra, el aumento de longitud por ser mayor la tension. Para prevenir por completo el efecto de los cambios de figura, se toma el doble de la diferencia que la fórmula (30) señala, y respecto de los aumentos de longitud, como ninguna carga los ha de ocasionar mayores que la de prueba, se adoptarán éstos como límite, calculándolos por las fórmulas del capítulo III, en las que se pondrá su valor p' en lugar de p. El uso de cables inversos atenúa mucho estas deformaciones.

75. El paso de la carga accidental influye tambien en los arcos inmediatos de un puente compuesto de muchos claros. Supongamos para mayor sencillez que en el tramo AB (fig. 38) hay una carga p' por unidad de longitud, mayor que la p que obra sobre el inmediato AC, y que siendo fijo el apoyo AD, puede resbalar sobre él el cable continuo OAO'. Si cuando sobre los dos obraba un peso igual eran iguales las flechas y las aberturas, ahora habrán variado aquellas porque las tensiones que producen en A los dos pesos distintos de cada tramo no serán iguales si lo son las inclinaciones de las tangentes AT, AT_1; por consiguiente, tendrá que bajar el cable AOB y subir el AO_1C, hasta que las componentes de las presiones respectivas en sentido de AT' y AT_1' se equilibren pasando cierta longitud de cadena de O_1 á O.

76. Siendo el alargamiento de la curva AOB igual al acortamiento de la AO_1C, la fórmula (30) nos indica que el aumento de flecha OO' será igual sensiblemente á la disminucion $O_1\ O_1'$. El valor de esta variacion deberá ser tal, que haga iguales las tensiones de los cables en los dos claros. El aumento de la tension horizontal por un aumento pequeño de flecha es, diferenciando con relacion á f la fórmula (10)

$$-\frac{p'H^2}{2f^2}\varphi$$

y el de la inclinacion de la tangente en A, que es $\frac{\varphi f}{H}$,

$$\frac{2\varphi}{H}$$

de donde se deduce que la tension de la cadena AOB será, despues de la deformacion (1),

$$T'=\frac{p'H^2}{2f^2}(f-\varphi)\sqrt{1+\frac{4(f+\varphi)^2}{H^2}}$$

La disminucion de la flecha AC produce en Q y tang. α las variaciones,

$$\frac{pH^2}{2f^2}\varphi \qquad \text{y} \qquad -\frac{2\varphi}{H},$$

por consiguiente

$$T_1'=\frac{pH^2}{2f^2}(f+\varphi)\sqrt{1+\frac{4(f-\varphi)^2}{H^2}}$$

de modo que contando con el rozamiento, se habrá de verificar la igualdad

$$T'e^{-r\eta}=T'_1:$$

reponiendo tang α en lugar de $\frac{2f}{H}$ y despreciando los cuadrados de φ respecto de f en los desarrollos del radical y de los productos, resulta

$$\varphi=\frac{f}{\cos.^2\alpha}\ \frac{p'e^{-r\eta}-p}{p'e^{-r\eta}+p}.$$

77. La fórmula precedente hace ver que con un coeficiente de rozamiento igual á 0,25, y valiendo $p'=\frac{3}{2}p$, la alteracion de la flecha puede llegar á ser $1/8$ de la total, y si se facilitase el movimiento con rodillos, valdria hasta más de $1/5$: y aunque estos resultados no son completamente exactos por caer fuera de la primera hipótesis hecha acerca de su pequeñez, hacen ver que es

muy perjudicial la movilidad de las cadenas sobre las pilas intermedias, y que es preciso impedirla cuanto sea posible. Por otra parte, esa sujecion tan conveniente, no perjudica mucho la estabilidad del apoyo, porque la diferencia de empujes cuando la cadena no puede moverse es

$$\frac{(p'-p)\,H^2}{2f};$$

y pudiendo resbalar sobre el apoyo (76).

$$\frac{(p'-p)\,H^2}{2f}\left(1-\frac{2\varphi}{f}\right)$$

cantidad que no suele diferir de la primera sino en una cuarta parte de su valor, y que aún anulando el rozamiento pasa de su mitad.

78. Estos efectos se disminuyen considerablemente si se sujeta el tablero con cables inversos. El $A_1\,C_1$ (fig. 39) tendrá que subir una cantidad φ estirándose y aumentando la tension de las péndolas en cierta cantidad t por unidad de longitud del tablero, y el $A_1\,B_1$ descenderá igual cantidad φ disminuyendo la tension tambien en igual cantidad y encogiéndose lo que su elasticidad le permita.

Los valores de la tension del párrafo (76), desarrollados sin apreciar más que la primera potencia de φ, dan la igualdad

$$(p'-t)\,e^{-r\gamma}\left(1-\frac{\varphi}{f}\right)\left(1+\frac{\varphi}{f}\,\text{sen.}^2\alpha\right)=(p+t)\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\left(1-\frac{\varphi}{f}\,\text{sen}^2\alpha\right):$$

por la fórmula ([33]) se tiene para el cable inverso (67)

$$\varphi=b't;$$

con cuya expresion se elimina t, y despreciando toda potencia de φ superior á la primera, se deduce

$$\varphi=f\,\frac{p'e^{-r\gamma}-p}{\cos.^2\alpha\left(p'e^{-r\gamma}+p\right)+b'f\left(1+e^{-r\gamma}\right)}$$

cantidad mucho menor que la de la fórmula análoga precedente.

79. El medio más eficaz de evitar esos movimientos es el empleo de tirantes superiores AEB, AE_1C (fig. 39), indispensables si el apoyo intermedio es una biela movible. En este caso, cuando el tramo AB esté más cargado, el apoyo girará sobre su base desviándose el punto A una cantidad AA' hácia dicho tramo, hasta tanto que la diferencia de empujes ocasionada por la variacion de carga y de flechas, combinada con la presion total en A, dé una resultante dirigida segun A'D. Llamando Q y Q_1 los empujes totales en AB y AC, P los pesos totales de la mitad de cada tramo, η la desviacion AA' y a la altura AD, se habrá de verificar la ecuacion

$$\frac{Q_1+\Delta Q_1-Q-\Delta Q}{P}=\frac{\eta}{a}$$

La fórmula ([10]), cuando se da un incremento pequeño y simultáneo á la luz y la flecha produce la expresion

$$\Delta Q=\frac{pH^2}{2f}\left(\frac{\eta}{H}-\frac{\varphi}{f}\right)$$

atendiendo á que el producto pH es constante; y como la relacion $\frac{\eta}{H}$ es una fraccion tan pequeña de $\frac{\varphi}{f}$, que no suele llegar á 0,03, se puede despreciar y atender solo al incremento φ.

Falta ahora ver cuánto varía la flecha por un aumento en la luz. Para esto observaremos que por las ecuaciones ([33]) y ([35]), la longitud efectiva del cable de longitud primitiva L, y con la carga p es, cuando tiene dimensiones y carga dadas,

$$L'=L+\frac{4f}{3H}\left(b+b_1\right)p$$

ó tambien, teniendo entónces la flecha f y la luz H,

$$L' = H + \frac{2}{3}\frac{f^2}{H^2}.$$

De ambas expresiones se deduce

$$L = H + \frac{2}{3}\frac{f^2}{H} - \frac{4f}{3H}(b + b_1 p),$$

que es la longitud que ha de tener el cable para alcanzar la flecha f con la luz H y la carga p.

Dando en esta expresion los incrementos á H y f, resulta, despreciando las cantidades pequeñas respecto de φ,

$$0 = \eta + \frac{4f}{3H}\varphi\left(1 - \frac{(b + b_1)p}{f}\right),$$

de donde se deduce

$$\varphi = -\tfrac{3}{4}H\frac{\eta}{f + (b - b_1)p}.$$

Llamando σ al peso de la unidad de longitud del tirante y f y φ á su flecha y la variacion de esta, se tendrá para la curva que dicho tirante afecte:

$$Q' = \frac{\sigma H^2}{2f'}$$

$$\Delta Q' = -\frac{\sigma H^2}{2f'} \cdot \frac{\varphi'}{f'}$$

$$\varphi' = -\tfrac{3}{4}H\frac{\eta}{f' - b'\sigma},$$

y la ecuacion de equilibrio, cuando un peso p' mayor que p carga sobre el tramo AB, será

$$\frac{p'H^2}{2f}\left(1 - \frac{\varphi}{f}\right) + \frac{\sigma H^2}{2f'}\left(1 - \frac{\varphi'}{f'}\right) - \frac{pH^2}{2f}\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)$$
$$- \frac{\sigma H^2}{2f'}\left(1 + \frac{\varphi'}{f'}\right) = \frac{\eta}{a}(p' + p + 2\sigma)H;$$

de la que, reemplazando φ y φ' por sus valores en η, se deduce, atendiendo á que la fraccion $\frac{(b + b_1)p}{f}$ es muy pequeña en el cable de suspension,

$$\eta = \frac{4f}{3H} \cdot \frac{p' - p}{\frac{p' + p}{f} + \frac{2\sigma}{f' - b'\sigma} \cdot \frac{f^2}{f'^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{p' + p + 2\sigma}{a} \cdot \frac{f^2}{H^2}}$$

De todos los términos del denominador, es el más importante el segundo, que da por sí solo un cociente muy aproximado, y el último tiene apenas influencia.

Con el valor de η se puede calcular el de φ para apreciar la movilidad del puente, y el de φ' para que hallando con él el nuevo valor del empuje Q', se pueda saber si la tension del tirante comprometerá demasiado su resistencia, y aumentar en este caso su peso.

80. En todas estas investigaciones se ha dejado de tener en cuenta el aumento de flecha propio del cable cuando en vez de la carga p recibe otra p' mayor; pero con esto se han simplificado mucho las fórmulas sin perder nada en su aproximacion. Tampoco se discuten los casos en que hay varios tramos, porque se aplican los mismos procedimientos sin más diferencia que tener presente entónces que la suma de los aumentos de flecha de los tramos cargados ha de ser igual á la suma de las disminuciones de los que no lo están.

CAPÍTULO V.

Movimientos de oscilacion.

ARTÍCULO I.

Oscilaciones ocasionadas por la elasticidad de las péndolas y el cable.

81. Se han estudiado hasta ahora la forma que afectan y las tensiones que sufren cada una de las partes de un puente colgado, suponiendo establecido el equilibrio entre las fuerzas que las solicitan y las resistencias que ellas oponen ; pero las cargas accidentales no actuan segun hemos supuesto de modo que no se verifique ningun sacudimiento, sino que bien sea al rodar los carruages por las desigualdades del tablero, bien al marchar sobre él los hombres ó los animales, se originan choques que pueden aumentar considerablemente en toda la obra los efectos que ántes hemos calculado

82. Dos clases de alteraciones produce en la cadena un peso, cayendo con cierta velocidad sobre un punto cualquiera del tablero : una deformacion, análoga á la que hemos estudiado en el artículo 2.° del anterior capítulo, y una extension ó dilatacion elástica, como la del capítulo 3.° (47). La deformacion irá creciendo, cualquiera que sea su especie, con velocidad variada hasta tanto que la fuerza viva de la masa que se mueve quede destruida por las resistencias que opone el sistema, desde cuyo punto el movimiento se convertirá en oscilatorio : se llaman *oscilaciones verticales* á las primeras y *longitudinales* á las segundas, y las estudiaremos con entera separacion, empezando por estas últimas.

83. Sea AB (fig. 40) una varilla que bajo la accion constante de un peso P ha tomado un alargamiento BC : si otro cuerpo de peso P' viene á chocar á éste, la varilla se alargará hasta que el trabajo de la elasticidad haya destruido la fuerza viva del choque, y despues se acortará, oscilando á un lado y otro, hasta que la resistencia del aire y otras causas destruyan este movimiento inicial : siendo cada vez menores segun esto las oscilaciones, la extension de la primera es la que nos interesa conocer.

84. En el curso de este artículo llamaremos L á la longitud primitiva de la varilla, z' á la distancia BC que se ha alargado por el peso P ; z'' á la distancia CO en que la alargaria el peso P' en reposo, z á la distancia variable de su extremo al punto O, M á la suma de las masas P y P', y v_1 á la velocidad que llevan al pasar por dicho punto O. El principio de las fuerzas vivas, ó sea la igualdad entre la fuerza viva adquirida, y el doble de la cantidad de trabajo desarrollada proporciona la ecuacion

$$\tfrac{1}{2}M(v^2-v_1^2)=(P+P')z-\frac{E\omega}{L}\left[\tfrac{1}{2}z^2+z(z'+z'')\right] \qquad (51)$$

en que el primer término del segundo miembro representa el trabajo de los pesos, y el segundo el de la fuerza elástica de la varilla desde el punto O en adelante (*).

(*) La fuerza elástica de la varilla AB es (47) $E\omega\frac{z}{L}$ cuando llega su extremo á un punto cualquiera D, y el trabajo desarrollado desde el punto

$$\frac{E\omega}{L}\int_0^z(z'+z''+z)dz,$$

que es el último término de la fórmula (51).

Multiplicando la ecuacion por $\frac{2L}{E\omega}$ y observando que

$$\frac{PL}{E\omega}=z',$$

$$\frac{P'L}{E\omega}=z'',$$

resulta

$$(z'+z'')\left(\frac{v^2}{g}-\frac{v_1^2}{g}\right)=-z^2. \qquad (52)$$

85. El mayor alargamiento Z se obtendrá buscando el valor de z que hace á v cero. Este valor es

$$Z=\frac{v_1}{k}, \qquad (53)$$

haciendo

$$k=\sqrt{\frac{g}{z'+z''}}.$$

86. La interpretacion geométrica de este resultado conduce á soluciones fáciles y elegantes. Si con una magnitud ON igual á $\frac{v_1}{k}$ trazamos una circunferencia cuyo centro sea O, los puntos N y N' serán los extremos de la oscilacion de la varilla, correspondiendo cada uno á uno de los dos valores de la fórmula (53). La oscilacion ascendente puede ocasionar compresion si N' cae más arriba que B, si nó no hace más que disminuir la tension. En cuanto al valor de $\frac{v_1}{k}$ es muy fácil construirlo, porque es el medio proporcional entre BO y la altura correspondiente á la velocidad v_1.

La misma construccion nos permite apreciar las demas circunstancias del movimiento. La velocidad correspondiente á una

posicion cualquiera D del extremo de la varilla es la ordenada del círculo multiplicada por k, porque el triángulo rectángulo ODE da

$$\overline{DE}^2=\overline{OE}^2-\overline{DO}^2=\frac{v_1^2}{k^2}-z^2$$

resultado á que se llega despejando $\frac{v^2}{k^2}$ de la ecuacion (52). El máximo corresponde al punto O, centro de las oscilaciones, en que es el radio del círculo.

87. La velocidad inicial de la masa M está representada por la ordenada CM, y es

$$v_0=k\sqrt{\frac{v_1^2}{k^2}-z''^2}.$$

Si se conoce la velocidad v' que lleva el peso P' ántes del choque, al llegar al punto C se tiene

$$v_0=v'\frac{P'}{P+P'}.$$

Con cuyas relaciones, dada una de las tres velocidades v', v_0, v_1, se conocen las otras dos.

88. El tiempo tardado en pasar de un punto cualquiera C á otro D está medido por el ángulo MOE que forman los radios OM, OE. Para demostrarlo tomemos una distancia Dd infinitamente pequeña, dentro de la cual el movimiento se pueda considerar como uniforme: los triángulos semejantes OED, E$e'e$, dan

$$\frac{Ee}{OE}=\frac{ee'}{DE}$$

y como $\frac{ee'}{DE\times k}$ es el elemento de espacio dividido por la velo-

cidad, que es el elemento de tiempo, la expresion de éste es

$$kdt = \frac{Ee}{OE} = \text{ángulo } EOe,$$

por consiguiente, el tiempo tardado en pasar de una posicion cualquiera M á otra E es

$$t = \frac{\text{ang. MOE}}{k}.$$

El espacio recorrido al fin de un tiempo cualquiera es

$$z = OE \cos. NOE,$$

y si se cuenta el tiempo desde el instante en que el móvil pasa por el punto O,

$$z = \frac{v_1}{k} \text{ sen. } kt.$$

El tiempo que dura una oscilacion completa es

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

y el número de oscilaciones en un segundo

$$n = \frac{1''}{T} = \frac{k}{2\pi}$$

expresiones ambas independientes de la velocidad inicial y de la amplitud de las oscilaciones.

Debe notarse que todas estas fórmulas son las del movimiento de un punto material atraido por un centro fijo proporcionalmente á la distancia, lo que se debe á que el extremo de la varilla se halla en el mismo caso.

89. Prescindiendo como hasta aquí de la inercia de los puntos materiales de la varilla AB, las leyes del movimiento para un punto cualquiera b se hallarán trazando una circunferencia que tenga con la MEN una tangente comun que pase por A. Si el peso del prisma se hubiera de tener en cuenta, se podria hacer con mucha aproximacion sumando al peso P la mitad del de la barra AB, lo cual produciria un pequeño aumento en z' y disminucion en v_1.

90. Las consecuencias que se deducen de esta teoría, aplicables á nuestro objeto, son las siguientes:

1.ª La influencia del choque es tanto mayor en la resistencia cuanto más corta es la varilla, pues siendo (85) el alargamiento absoluto debido al choque

$$Z = \frac{v_1}{k} = v_1 \sqrt{\frac{z'+z''}{g}} = v_1 \sqrt{\frac{(P+P')L}{gE\omega}}$$

la proporcion segun la cual se haya alargado la varilla, será

$$i = \frac{Z}{L} = v_1 \sqrt{\frac{(P+P')E}{gE\omega L}}$$

y la tension por unidad de superficie de la seccion trasversal debida al choque además de la correspondiente al equilibrio, será

$$Ei = v_1 \sqrt{\frac{(P+P')E}{g\omega L}} \qquad (54)$$

2.ª Si la masa P, animada de una velocidad inicial cualquiera oscilase sujeta á la extremidad de la varilla, el centro de la oscilacion sería el punto C (fig. 41) en que $BC = z'$; y si se supone que al llegar al fin de la semioscilacion ascendente ó á B se coloca un nuevo peso P' sin velocidad inicial ninguna, la oscilacion descendente tendrá por centro el punto O en que $CO = z''$ y por radio la distancia OB, de modo que la amplitud de la oscilacion entera se habrá aumentado en la cantidad $NN_1 = 2CO = 2z''$. Si al llegar á N_1 se quita el peso P', el centro de oscilacion será el punto C como ántes, y la oscilacion ascendente habrá aumentado

nuevamente en la cantidad $BB_1 = 2z''$; y si se continúa poniendo el peso al acabar la semioscilacion ascendente, quitándolo al fin de la descendente, las amplitudes irán aumentando en una progresion por diferencias

$$2z'',\ 4z'',\ 6z''.....2nz''$$

tanto por debajo del punto C como por encima, de modo que al cabo de un número corto de alternativas de accion del peso P', el límite de elasticidad se habrá traspasado, la progresion crecerá más rápidamente aún y la varilla se romperá. Estos efectos se producirian con más energía si en lugar de colocar el peso P' sin velocidad inicial, se dejase caer produciendo choque, pues los radios de las oscilaciones descendentes serian mayores, aunque no varien los centros.

3.ª El número mayor de oscilaciones que puede hacer la varilla en el primer caso sin romperse se deduce de la ecuacion

$$2nz'' = (m-1)(z'+z'')$$

en la que m es la relacion de la carga límite á los pesos P+P'. Y se ve que cualquiera que sea el diámetro de la varilla, siempre habrá un número de oscilaciones repetidas que causen su rotura.

91. Hagamos aplicacion de estos principios al cálculo y construccion de los puentes colgados.

Para tomar el caso más desfavorable y que en nada se mezclen en estas vibraciones las del artículo siguiente, haremos que el cuerpo chocante actúe en toda la extension del tablero con un peso p' por unidad de longitud.

Para hacer más sencilla la resolucion de este problema, supondremos conocida la forma que afecta el cable en un instante cualquiera, y admitiremos que se confunde sensiblemente con la parábola que pasa por los puntos de suspension y la posicion del vértice. De este modo, cuando dicho punto haya bajado una cantidad z, se puede considerar que se ha producido el mismo efecto que con una carga $\frac{z}{b}$ uniformemente repartida por la horizontal

(47), y como el camino recorrido en un instante por el centro de gravedad de esa carga es $\frac{2}{3}d.z$, el trabajo que esta resistencia haya efectuado desde la posicion de equilibrio con la carga $p+p'$, en que el descenso elástico es $z'+z''$, hasta que la desviacion haya llegado á su máximo $Z+z'+z''$ será

$$\frac{4H}{3b}\left[\tfrac{1}{2}Z^2+Z(z'+z'')\right]$$

Entre ambas posiciones límites, el centro de gravedad de los pesos del tablero, que nunca han dejado de conservar la misma distribucion, ha bajado la cantidad $\frac{2}{3}Z$, dando lugar á un trabajo igual á

$$\tfrac{4}{3}(p+p')HZ.$$

La velocidad al pasar por la posicion de equilibrio que consideramos como inicial, es constante para todos los puntos é igual á v_1; y es tambien para todos nula en la máxima desviacion, por consiguiente, la fuerza viva adquirida es

$$-\frac{2(p+p')H}{g}\cdot\frac{v_1^2}{2}.$$

Con estos datos se puede escribir la ecuacion del movimiento total

$$-\frac{(p+p')H}{2g}v_1^2 = \tfrac{2}{3}(p+p')HZ - \frac{2H}{3b}\left[\tfrac{1}{2}Z^2+Z(z'+z'')\right].$$

Multiplicándola por $\frac{3b}{2H}$ se puede escribir de este modo

$$Z^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{z'+z''}{g}v_1^2$$

de donde se deduce, conservando á k la misma significacion que ántes,

$$Z = \frac{v_1}{k}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Esta fórmula indica que el efecto de la velocidad v_1 es equivalente al de una nueva sobrecarga $\frac{Z}{b}$ por unidad de longitud, y que el centro de las oscilaciones del punto medio se halla en la posicion que ocuparia el vértice con los pesos $2(p+p')H$ en reposo.

92. El aumento de la tension del cable será proporcional á la sobrecarga $\frac{Z}{b}$ que corresponde á la unidad de longitud, cuya cantidad, atendiendo á que en el valor de b (33) puede despreciarse la fraccion $\frac{f^2}{H^2}$, equivale á

$$v_1 \frac{f}{H^2}\sqrt{\frac{4(p'+p'')E\omega}{g}}. \qquad (55)$$

Se deduce de esta expresion que será el efecto de las vibraciones elásticas tanto ménos sensible comparativamente cuanto menor sea la flecha con relacion á la luz, y mayor sea ésta. Por lo demas es imposible de todo punto dar al cable la resistencia suficiente para recibir sin alterarse una serie continuada de choques, por lo que debe evitarse que en el paso de las tropas por los puentes colgados entren muchos hombres á la vez, y prohibirse absolutamente que marchen con paso uniforme.

Tambien se deduce de la comparacion de las fórmulas (54) y (55) que las péndolas, como varillas verticales, se hallan en circunstancias más desfavorables que las cadenas de suspension.

ARTICULO II.

Oscilaciones debidas á la flexibilidad de la construccion.

93. Las oscilaciones verticales, debidas á la flexibilidad de la cadena de suspension, en nada perjudican directamente á la estabilidad ni á la resistencia del puente; pero conviene saber qué influencia tienen en su extension las dimensiones de éste, pues si son muy grandes y rápidas, fatigan y destruyen los ensamblages y articulaciones de todas las piezas, y si crecen á medida que son mayores las dimensiones del puente, no se podrá nunca pasar de aberturas medianas ó pequeñas El caso más desfavorable es aquel en que un peso P choca en el punto medio del cable O (fig. 37) con la carga permanente, y es el que vamos á examinar.

94. Para tener una medida de la resistencia que opone el cable á variar de forma, supondremos que ésta se compone en todos los instantes de dos ramas parabólicas que satisfacen á las ecuaciones del núm. 72 (*). Entónces, cuando el punto O se halla en otro O'' distante de la posicion de equilibrio O' la cantidad z, esta resistencia estará medida por el esfuerzo necesario para mantener el punto medio del cable en la posicion O'', que por la fórmula (50) está expresado por

$$\frac{4pH}{f}(z'+z)$$

siendo z' la distancia OO'. El centro de gravedad de los pesos p no cambia de posicion, como puede comprobarse por las fórmulas de los números (72) y (73); por lo que llamando Z al descenso máximo contado desde O', y v_1 á la velocidad del peso P en dicho punto O', la ecuacion de las fuerzas vivas será, entre las posiciones inicial y final,

$$-P\frac{v_1^2}{2g} = PZ - \frac{4pH}{f}\left(\tfrac{1}{2}Z^2 - Zz'\right)$$

(*) He comprobado experimentalmente que esta suposicion se aparta poco de la verdad, lo mismo que las fórmulas que de ella resultan.

de la que se deduce, poniendo por z' su valor,

$$Z = v_1 \sqrt{\frac{Pf}{4pHg}},$$

en cuya fórmula se ve que la amplitud de las oscilaciones es más pequeña cuanto mayor es la luz y menor la flecha del puente. Esto nos demuestra la ventaja que ofrecen los cables de grande abertura y pequeño ángulo de suspension respecto de las oscilaciones debidas á su flexibilidad.

ARTICULO III.

Oscilaciones horizontales.

95. Las oscilaciones horizontales son producidas por la accion del viento. Cualquiera que sea su direccion, pudiendo añadirse la componente vertical al peso de la obra, sólo tendremos que considerar la horizontal. Ésta ejerce un efecto casi nulo en el tablero, tanto por su grande anchura como por la pequeña superficie trasversal que presenta. El efecto mayor es el causado en las péndolas y cables, que sin embargo, no pudiendo desviarse sin levantar el peso del tablero, reducen sus oscilaciones á pequeñas distancias á un lado y otro del plano vertical que los contiene en el estado de equilibrio. Obtendremos un límite suponiendo que el cable puede girar libremente alrededor de la recta que une los puntos de suspension, y estos resultados pueden dar idea del modo de proyectar los cables cuando se quieren establecer en un plano inclinado.

96. La cadena tomará la forma de equilibrio correspondiente á la accion de la resultante de los pesos y de la impulsion del viento. Suponiendo que éste actúa proporcionalmente á la abertura del puente, y llamando q á su intensidad por unidad de longitud, las resultantes serán todas paralelas á la diagonal del rectángulo formado sobre p y q, y su intensidad

$$r = \sqrt{p^2+q^2},$$

la curva será plana y parabólica, siendo la flecha en su plano igual á la flecha vertical f ántes del movimiento, y la tension horizontal [10]

$$Q' = \frac{rH^2}{2f} = \frac{H^2}{2f}\sqrt{p^2+q^2}.$$

Como la inclinacion del plano de la curva sobre el horizontal tiene por tangente $\frac{p}{q}$ las proyecciones de las flechas serán

$$f' = f\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \qquad f'' = f\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

con las cuales se pueden trazar las parábolas proyecciones de la del cable.

97. La fuerza q, segun la teoría de la resistencia del aire, es de la forma

$$k\pi b\,\frac{v^2}{2g}$$

en que v es la velocidad del aire, b el grueso de la cadena, π el peso específico del aire y k un coeficiente práctico.

Cuando q es pequeño respecto de p, puede tomarse

$$Q' = Q\left(1+\frac{q^2}{2p^2}\right), \quad f' = f\left(1-\frac{q^2}{2p^2}\right), \quad f'' = f\frac{q}{p}\left(1-\frac{q^2}{2p^2}\right)$$

de modo que pueden despreciarse la separacion horizontal y el aumento de empuje de las cadenas, y la separacion vertical es proporcional á la flecha de equilibrio. Debiendo estos resultados disminuirse por la resistencia del tablero, vemos cuánta debe ser la pequeñez de este efecto, lo que confirma la experiencia. No sucede así con la accion vertical sobre el tablero que es á veces de gran consideracion, tanto por la parte superior como por la

inferior, y como obra con intermitencia y desigualdad, produce sacudimientos muy perjudiciales en todas las partes de que se compone el puente.

98. Los cables inferiores invertidos son el medio más eficaz de contrarestar los desarreglos que produce la componente vertical del viento, cualquiera que sea el sentido en que actúe. Para oponerse al efecto de la componente horizontal, el ingeniero Oudry ha imaginado colgar cada extremo de las viguetas de dos péndolas diversamente inclinadas *ab*, *ac*, (fig. 42) situadas en el plano vertical que pasa por *aa* y suspendidas de dos cables cuyas curvas llevan la misma inclinacion. De este modo, mientras la prolongacion de la resultante R del peso P que actúa en *a* y de la fuerza Q del viento caiga en el interior del ángulo *bac*, ambas péndolas estarán tirantes y el tablero no se moverá. Pero es preciso tener en cuenta que los movimientos elásticos de los cables son muy sensibles, y que por esto la fijeza del punto *a* no será tan grande.

CAPÍTULO VI.

De los principales sistemas de puentes colgados.

99. El sistema de cables con péndolas verticales no es el único que se ha adoptado para la construccion de puentes colgados, y aunque tiene más ventajas y se ha usado con más frecuencia que los demas, es indispensable dar una idea de los principales de éstos y compararlos con el primero. Nos limitaremos á hacer el exámen de los siguientes:

1.° El de Dredge.
2.° El de tirantes.
3.° El de cadenas inferiores.
4.° El de Oudry.

100. En el sistema de Dredge, el tablero se une á la cadena por medio de péndolas inclinadas (fig. 43), lo que permite disminuir en una proporcion considerable el espesor de aquella, á partir de los extremos (fig. 44), en que tiene el mismo que en la de un puente ordinario, al paso que en éstos la diferencia de tensiones es muy pequeña (18). Aunque en la cadena se economiza mucho material, es menester no olvidar que las péndolas son más largas, y que descomponiéndose el peso *mp* que actúa en cada una en las direcciones *mn* de la misma péndola y *m*E del tablero, sufren aquellas una tension *mt* mayor, y que en el tablero se ejercen tensiones horizontales *mq* que varian precisamente al contrario (fig. 45), circunstancias cuya exacta compensacion se demostrará muy pronto.

101. Para establecer un puente de este sistema se observará que el empuje horizontal que se ejerce en el medio E tiene que

hacer equibrio alrededor del punto A á todos los pesos que cargan en la extension EB del tablero, y que por esto la ecuacion de momentos dará para dicho empuje la misma expresion ([10]). Si se construye un triángulo QOP (fig. 46) igual al de la figura 19, en que QO sea el empuje horizontal en E y OP el peso de la mitad del puente, y se divide este último lado en partes iguales entre sí y al peso de cada una de las divisiones del tablero, que deben ser tambien iguales, se pueden trazar con facilidad las direcciones y magnitudes de las tensiones de todas las piezas del puente.

Para esto se tirarán por los puntos de division P_1, P_2, P_3, etc., del lado OP rectas paralelas á OQ, y á partir de P se formará un polígono cuyos lados sean sucesivamente paralelos á la direccion de cada una de las péndolas (empezando por la más inmediata al apoyo) y cuya longitud esté comprendida entre dos paralelas consecutivas: así, siendo la distancia $p_3 q_2$, por ejemplo, igual al peso que actúa en el punto e_3 del tablero (fig. 43), representado en la figura 46 por $P_2 P_3$, la tension ocasionada en la péndola será $p_2 p_3$ en magnitud y direccion (100), y la componente horizontal que corresponde á este punto $p_2 q_2$. De aquí se deduce la direccion de cada lado del polígono que ha de formar la cadena y su tension, pues debiendo equilibrar la resultante de cada dos de éstas al esfuerzo que ejerce la péndola que comprenden, las tres fuerzas han de cerrar un triángulo con sus magnitudes y direcciones; y como se conocen las de cada una de las últimas, que son los lados del polígono $Pp_7p_6p_5 \ldots p_1$, y una de las primeras, que es la QP, direccion del lado adyacente al punto A (fig. 43) (por ser resultante de las fuerzas QO y OP) se unirá el punto Q con los $p_6, p_5 \ldots p_1$, y las rectas Qp_1, $Qp_2 \ldots Qp_6$, QP, marcarán la direccion de cada lado del polígono á partir de E y la magnitud de su tension. Las distancias P_2p_2, P_3p_3 representan las tensiones horizontales que se ejercen en toda la extension de las divisiones e_1e_2, e_2e_3, etc., y equivalen á la resultante ó suma de las que desde el extremo B se trasmiten de uno en otro punto hasta los e_1, e_2, etc., para destruirse en medio del tramo: el empuje horizontal del puente se descompone en dos partes; una Qq que sufre el eslabon central de la cadena, y otra Oq que ha de resistir el tablero, ó una cadena de refuerzo que se le añada, como la de la figura 45.

102. Con estos datos es muy fácil construir la figura del puente. Como las péndolas suelen tener demasiada inclinacion en los puntos próximos al estribo para unirse á la cadena, se hacen partir del punto A dos ó tres como Ae_8, Ae_7, á las cuales serán respectivamente paralelos los primeros lados Pp_7, p_7p_6 del polígono de la figura 46, y luego se empezará trazando un lado Al_6 paralelo á Qp_6 y una péndola e_6l_5 paralela á $p_6\,p_5$; desde el punto de interseccion l_6 se trazará un lado l_6l_5 paralelo á Qp_5 y desde e_5 una péndola e_5l_5 paralela á p_4p_5, continuando de este modo hasta el punto l_2, desde el cual una paralela á Qp_1 pasará por el punto e_1 en donde termina el polígono.

103. Comparando la figura 46 con la 19, se ve la gran diferencia que hay en las tensiones de los elementos más bajos de una cadena del sistema de Dredge y las del sistema ordinario. Cada eslabon, en dicha cadena, suele disminuirse de una barra, y para que las tensiones siguiesen rigorosamente la misma progresion por diferencias sería preciso que el polígono $Pp_7p_6 \ldots p_2p_1$ estuviese inscrito en una curva de segundo grado, cuyo foco fuese el punto Q; porque entónces las distancias á éste de cada uno de los de la curva aumentaria proporcionalmente á las del mismo á la recta OQ. Si esta curva fuese una parábola, la diferencia de tension de dos eslabones inmediatos sería exactamente igual al peso que sostiene la péndola que comprenden, y el ángulo que cada una de éstas formase con la vertical sería doble que el del lado adyacente.

Es menester observar que toda la parte Pp_6 del polígono que corresponde á las péndolas concurrentes en el punto A no se puede sujetar á ninguna condicion, porque ya está determinado, y el lugar geométrico de sus vértices es siempre un arco de parábola, que prolongado pasaria por el punto Q.

104. Toda la economía que puede resultar de poner las péndolas más ó ménos inclinadas ha de provenir de que el empleo de la madera para reforzar el suelo sea ménos costoso que el del hierro; pero el puente pierde el carácter esencial y la principal ventaja de los colgados, que consiste en permanecer siempre en la posicion de equilibrio que les corresponde segun el modo con que están cargados. Lo que suele hacerse en todos los casos en que se colocan péndolas inclinadas, es trasmitir los empujes á los

estribos por medio de la resistencia á la compresion del tablero, pero entónces, el volúmen que se ha de añadir es mucho mayor; y el estado de la obra es tan violento, que como ha sucedido ya algunas veces, la desigualdad en la carga de las dos mitades es bastante para que el piso salte, formando una curva C*b*E y sosteniendo todo su peso de la mitad AE de la suspension.

105. Caso particular de este sistema, aunque más antiguo, es el de los puentes sostenidos por tirantes, que partiendo de diferentes puntos del tablero se reunen en el extremo superior del apoyo (fig. 47), en el cual un fiador equilibra su tension horizontal. La teoría de estos puentes se funda en la consideracion de que un peso P, que actúe en el punto M, se descompone en sentido del tirante y del tablero en las tensiones M*t* y M*q*, la cual es igual á P*t*; de modo que para hacer un proyecto segun este sistema basta unir los puntos de division del tablero con el extremo del apoyo correspondiente, lo que da la figura del puente y la longitud de los cables; y para hallar sus tensiones, á las que se habrán de arreglar las secciones trasversales, se tomará desde A hasta *a* una longitud igual al peso de una de las divisiones del tablero, que deben ser iguales, y la horizontal trazada por *a* da por su interseccion con cada tirante AM su tension A*m*, igual á M*t*, y la reaccion horizontal sobre el tablero *am*, igual á M*q*, que deberá destruirse por un refuerzo conveniente.

106. Como la direccion en que el tirante exige un volúmen menor es la inclinada con el horizonte 45° (36), se han dispuesto proyectos de puentes con tirantes paralelos, como en la figura 48, pero segun veremos luego, el coste de los dos puentes será el mismo, á igualdad de luz y de flecha, y la dimension de ésta es casi siempre irrealizable.

En ambos casos, el pandeo que habrian de tener los tirantes centrales es un inconveniente de gran consideracion que hace muy movibles y desventajosos estos puentes, y es el motivo principal porque se han abandonado.

107. Los puentes de cadenas inferiores (fig. 49) tienen en el dia muy poco uso, porque aún cuando se economiza en ellos la construccion de apoyos y una parte del fiador, tienen poca estabilidad; y en el resto de la obra son más costosos que los ordinarios. Para demostrarlo se observará que en uno de éstos de la misma luz y flecha, las péndolas ocupan el área AOC, que es el tercio del rectángulo AEOC, al paso que en los primeros ocupan el área AOE, doble de la anterior; por consiguiente, en igualdad de circunstancias, la suma de las longitudes de las péndolas es doble en los puentes apoyados en las cadenas que en los suspendidos por ellas: y además, como por su manera de resistir su seccion trasversal ha de ser mayor, resulta que el volúmen total de las péndolas es más que doble. Por otra parte, para que estos puentes sean estables y puedan resistir la accion de las vibraciones, que tienden á producirse con más intensidad, es menester darles una flecha muy pequeña, apartándose así más de la relacion más económica para los puentes suspendidos (117).

El proyecto de estos puentes se ha de hacer por las mismas reglas del capítulo 1.°, variando lo relativo á las péndolas conforme con lo que se acaba de decir.

108. El sistema de Oudry, propuesto para salvar con cuatro tramos de un kilómetro cada uno el estrecho de Mesina, tiene por objeto hacer cadenas indeformables bajo la accion de las cargas accidentales que pasen por el puente. Cada cuchillo se compone de dos cables cruzados (fig. 50), cada uno de los cuales afecta la forma de equilibrio que le corresponde cuando una mitad está más cargada que la otra. Arriostrando luego los dos cables de modo que su posicion mutua no pueda variar, como en la parte AO se muestra, se consigue que miéntras las cargas no pasen de cierto límite, la curva de presiones no salga del interior de la figura AOG, pudiendo mirar á todo el cuchillo como compuesto de dos sólidos elásticos AOG, BOC, articulados en los puntos A, O, B, los cuales no permiten más variacion en las distancias mutuas de estos tres puntos ni en su forma propia, que la que proviene de su elasticidad. Haremos el cálculo prescindiendo de estas pequeñas variaciones, que podrán tener, sin embargo, alguna influencia sensible en las trepidaciones causadas por el movimiento.

109. Sea *f* la flecha OE del punto de interseccion, que se toma por orígen de coordenadas; *p* la carga repartida uniformemente en toda la longitud AB, y *p'* el exceso por unidad de longitud en la parte EB, que ocasiona la deformacion de la curva ACB. La

ecuacion ([6]) diferenciada, da, para la parte AO, cuya ordenada qr designaremos por y_1

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{p}{Q}$$

y para la OCB, cuya ordenada será $pn=y_2$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}=\frac{p+p'}{Q}.$$

Integrando ambas ecuaciones, se tiene

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{px}{Q}+A,$$

$$\frac{dy_2}{dx}=\frac{p+p'}{Q}x+A'.$$

Para el punto O, en que $x=0$, ambas derivadas deben ser iguales para establecer la continuidad entre las dos curvas, por consiguiente,

$$A=A'.$$

Integrando de nuevo, y teniendo presente que ambas curvas coinciden en el orígen,

$$y_1=\frac{px^2}{2Q}+Ax,$$

$$y_2=\frac{p+p'}{2Q}x^2+Ax.$$

La primera ecuacion ha de dar, para el punto A, $x=-h$, $y_1=f$ y la segunda, para $x=h$, $y_2=f$; de cuyas condiciones se deduce

$$A=-\frac{\frac{1}{2}p'}{p+\frac{1}{2}p'}\cdot\frac{f}{H}$$

$$2Q=\frac{(p+\frac{1}{2}p')H^2}{f}$$

siendo las ecuaciones de las dos curvas

$$y_1=f\left(\frac{p}{p+\frac{1}{2}p'}\cdot\frac{x^2}{h^2}-\frac{\frac{1}{2}p'}{p+\frac{1}{2}p'}\frac{x}{h}\right)$$

$$y_2=f\left(\frac{p+p'}{p+\frac{1}{2}p'}\cdot\frac{x^2}{h^2}-\frac{\frac{1}{2}p'}{p+\frac{1}{2}p'}\cdot\frac{x}{h}\right).$$

Haciendo $p'=\frac{p}{n}$, estas ecuaciones toman esta forma:

$$y_1=\frac{f}{2n+1}\left(2n\frac{x^2}{h^2}-\frac{x}{h}\right) \qquad ([56])$$

$$y_2=\frac{f}{2n+1}\left((2n+2)\frac{x^2}{h^2}-\frac{x}{h}\right)$$

y la ordenada DC del punto más bajo es igual á

$$\frac{1}{8}\frac{f}{(n+1)(2n+1)},$$

la que sumada á f' da la flecha total de cada curva, que es

$$f\frac{(4n+3)^2}{8(n+1)(2n+1)}.$$

110. La ecuacion de la parte $On'B$ del cable simétrico se obtendrá cambiando x en $-x$ en la ecuacion ([56]), resultando

$$y_1=\frac{f}{2n+1}\left(2n\frac{x^2}{h^2}+\frac{x}{h}\right).$$

Tomando la semisuma de las ordenadas pn, pn' de los dos cables, resultará el valor de pm, que es la de la curva media OmB, y su expresion

$$y=\frac{fx^2}{h^2}$$

demuestra que esa curva es la parábola que pasa por los puntos A, O, B. La semidiferencia de las mismas ecuaciones da la separacion de cada cable de dicha curva media, cuya expresion es

$$u=\pm\frac{fx(h-x)}{(2n+1)h^2};$$

correspondiendo el signo superior á la parte mn' y el inferior á la parte mn. Estas ecuaciones hacen ver que la mayor ó menor amplitud de la parte nn' depende del número n que se haya escogido para hacer el proyecto, siendo la máxima cuando $n=0$.

111. El empuje horizontal que el sistema completo ejerce sobre los puntos A y B se encontrará considerando que la resultante de todas las fuerzas que hay entre O y B debe pasar por el punto de articulacion O, incapaz de resistir á la accion de ningun par. Supondremos que además de un peso uniformemente repartido p por unidad de longitud hay una carga en la mitad OB, acerca de la que haremos dos hipótesis: 1.°, que esté repartida uniformemente en la longitud EB, siendo p_1 lo que corresponde á la unidad: 2.°, que esté concentrada en un punto a siendo P su intensidad.

Las reacciones sobre los apoyos serán en el primer caso

$$\Pi=ph+\tfrac{3}{4}p_1h.$$
$$\Pi'=ph+\tfrac{1}{4}p_1h;$$

y tomando los momentos respecto del punto O se obtiene

$$Q_1=\frac{(p+\tfrac{1}{2}p_1)h^2}{2f}$$

En el segundo caso, designando por c la abscisa del punto a, se tiene

$$\Pi=ph+P\frac{h+c}{2h}$$

$$\Pi'=ph+P\frac{h-c}{2h}$$

$$Q_2=\frac{ph^2+P(h-c)}{2f}.$$

112. Obtenidos estos valores, es fácil hallar el momento respecto de un punto cualquiera m, que es en el primer caso

$$M_1=\tfrac{1}{4}p_1x(h-x)$$

y en el segundo

$$M_2=\tfrac{1}{2}P\frac{h-c}{h^2}x(h+x);$$

observando que en ambas expresiones desaparece p por ser parabólico el eje BamO.

Dividiendo estos momentos por el valor respectivo del empuje horizontal, se tendrá la distancia mb á que la curva de presiones corta á la línea vertical nn', conocida la cual se podrán distribuir los esfuerzos que corresponden á cada cable y á los codales intermedios por las reglas de la resistencia de materiales.

113. Para que el arco no se deforme es menester que sufran tension los dos cables, ó lo que es lo mismo, que el punto b caiga entre n y n'. Esta condicion exige que

$$\frac{M_1}{Q_1} \quad ó \quad \frac{M_2}{Q_2}<u,$$

cualquiera que sea el valor de x y sin atender al signo de estas expresiones, para lo cual se necesita que el máximo de

$$\frac{M_1}{Q_1u} \quad ó \quad \frac{M_2}{Q_2u}$$

sea menor que la unidad, ó lo que es lo mismo

$$\frac{\frac{1}{2}p_1(2n+1)}{p+\frac{1}{2}p_1}<1$$

$$\frac{P(h-c)(2n+1)}{ph^2+P(h-c)}\cdot\frac{h+x}{h-x}<1.$$

La primera desigualdad, independiente de x, conduce á la expresion

$$p_1<\frac{p}{n}$$

lo que indica que miéntras la carga adicional guarde con la permanente una relacion menor que la que ha servido para trazar la figura, los dos cables experimentarán tension. Cuando $p_1=\frac{p}{n}$ toda la tension cargará sobre el cable OCB quedando el On'B sin ninguna, y cuando p_1 fuese mayor, como este último cable no puede oponerse á una compresion, el sistema dejará de ser indeformable y el puente quedará sostenido por el cable AOCB solo.

En el segundo caso, el máximo del primer miembro tendrá lugar para el mayor valor de x, que es c, puesto que el valor de M_2 calculado no se aplica más que desde O hasta a. La expresion que corresponde á este máximo es

$$\frac{P(h+c)(2n+1)}{ph^2+P(h-c)}<1.$$

Tratándose de un peso que circule de un extremo á otro del puente, se verificará el caso más desfavorable para esta desigualdad cuando $c=h$, siendo entónces el límite de su valor

$$P<\frac{\frac{1}{2}ph}{2n+1}$$

114. No se han hecho comparaciones entre el coste de los di-

versos sistemas de puentes colgados, porque se demuestra como proposicion general, que *cualquiera que sea la disposicion mutua de las piezas, su volúmen total es el mismo*, miéntras se conserven las mismas las dimensiones generales, y se empleen materiales de igual naturaleza ejercitando resistencias análogas.

Ántes es menester observar que un hilo AB (fig. 51) solicitado por una fuerza P necesita para resistirla el mismo volúmen que el que exigen reunidos otros dos hilos AC, AD, proyecciones rectangulares de éste, sometidos cada uno respectivamente á una fuerza Q ó R, proyeccion de la misma P. En efecto, el volúmen de este hilo ha de ser proporcional á AB$\times$P, el de cada una de sus proyecciones lo ha de ser á AC$\times$Q y AD$\times$R, y como estos productos están con el primero en la relacion de los cuadrados de los cosenos de los ángulos comprendidos, y los dos son complementarios, la suma de los dos volúmenes será equivalente al primero.

115. Para demostrar ahora el teorema enunciado, sean FA, FO la semiluz y la flecha de un puente, incluyendo en esta última la distancia hasta la horizontal del tablero. Tomando OD$=\frac{Q}{p}$, se puede trazar en el rectángulo OBCD una figura análoga á la 46, que dé todas las tensiones, porque CD es igual al peso total dividido por p, ó $\frac{pH}{p}$; sólo que ahora dicha figura habrá girado un ángulo recto. Suponiendo para mayor generalidad que las divisiones ab, bc, etc. del tablero son desiguales, la figura se habrá de construir bajando las perpendiculares oq, pr de los puntos medios de las divisiones, que darán en el lado CD la porcion qr proporcional al peso que carga en la péndola bm, y trazando desde el primer punto así obtenido k' un polígono cuyos lados sean sucesivamente perpendiculares á la direccion de las péndolas y comprendidos entre las mencionadas paralelas, se obtendrá en el lado $o'p'$ representada la tension de la péndola bm; en el radio Op' la del lado mn, y en la perpendicular $p'r$ la del tirante horizontal bc. Todas estas líneas, multiplicadas por p dan las tensiones efectivas, y divididas por R la seccion trasversal que necesita cada pieza, de modo que los volúmenes de éstas son los productos

de las líneas correlativas de las figuras OBA, ODC, multiplicadas por $\frac{p}{R}$. Vamos á hallar la suma de aquellos productos.

Consideremos tan sólo la parte de puente comprendida entre las dos verticales *fo*, *gp*, que pasan por los puntos medios de dos espacios consecutivos de tablero. La porcion *mf* del lado *ml* tiene por proyecciones rectangulares *st*, *ov*, y su tension O*o'*, por su posicion especial, tiene por proyecciones correspondientes O*o*=*sf*, y *oo'*, por cuyo motivo el volúmen de *mf* es la suma de las áreas rectangulares *sfdt* y *oo'm'v*. Las proyecciones del trozo *mg* del lado *mn*, multiplicadas por las de su tension O*p'* dan las áreas *tegu*, *vn'p'p*. Las de la péndola *bm* son *mv* y *hm'*, las de su tension *o'p'* son *op* y *m'n'*, por lo que su volúmen es la suma de los rectángulos *depo* y *hm'n'b'*. Finalmente, la porcion *bo* por su tension *o'q* producen el área *o'hiq*, y el trozo *bp* por su tension *p'r* dan el rectángulo *b'p'ri*; resultando de la adicion de todas estas áreas parciales la superficie comprendida entre las dos verticales *rg*, *qf*, y las dos horizontales *gu*, *fs*, trazadas por donde aquellas encuentran al polígono de suspension.

Aplicando este resultado á las demas porciones de tablero, llegaremos á conocer que el volúmen de todo el hierro del puente desde O hasta I*k* está representado por la superficie ILD*k'* : queda el trozo IA del último lado, cuyo volúmen, por lo ántes dicho, será la suma de IGFL y *k*BC*k'*, resultando para el producto total que se busca el área del rectángulo FACD disminuida de la pequeña faja GAB*k*. Se ve, pues, que el volúmen total de hierro necesario es independiente de la forma y distribucion de las piezas, y es el mismo siempre que sean iguales la luz, la flecha, la altura del tablero y la última division de éste B*z*, porque el peso de su mitad B*k* no descansa sobre la suspension, sino sobre el estribo en B.

116. Siendo FA=H, FF'=*f*, F'O=*e*, B*z*=*h* la forma analítica del área expresada es

$$\left(f+e+\frac{Q}{p}\right)H-\tfrac{1}{2}h(f+e).$$

El valor exacto del empuje es

$$Q=p\frac{Ok(kB+\tfrac{1}{2}Ok)}{FF'}=p\frac{(H-\tfrac{1}{2}h)(\tfrac{1}{2}H+\tfrac{1}{4}h)}{f}=p\frac{H^2-\tfrac{1}{4}h^2}{2f};$$

y sustituyéndolo en la fórmula anterior, que para representar el volúmen V se multiplicará por $\frac{p}{R}$, sale

$$V=\frac{p(H-\tfrac{1}{2}h)}{Rf}\left[f(f+e)+\tfrac{1}{2}H(H+\tfrac{1}{2}h)\right]. \qquad (57)$$

En las aplicaciones ordinarias se puede despreciar *h* sin inconveniente.

117. Esta fórmula nos indica que la relacion $\frac{f}{2H}$ que hace más económica la construccion, atendiendo solo al volúmen de hierro es $\tfrac{1}{4}\sqrt{2+\frac{h}{H}}$, que vale muy próximamente $\tfrac{1}{3}$; pero nunca se adopta porque se originarian gastos mayores en los apoyos ó llegarian éstos á hacerse imposibles por su gran altura, y además el puente no sería bastante rígido, segun se ha visto en el anterior capítulo, ni las péndolas se podrian mantener bien en su sitio en las porciones más inclinadas de los cables. Por esta razon se hacen siempre éstos con una flecha de $\tfrac{1}{10}$ ó $\tfrac{1}{15}$ de la luz, y á veces de $\tfrac{1}{20}$.

118. Conservando la misma relacion entre *f* y H, la expresion (57) es sensiblemente proporcional á H^2 : de esto se deduce que el coste de los cables y péndolas de un puente de longitud dada, está en razon inversa del número de tramos en que se divide, pues si el coste de cada uno ha de ser $\frac{H^2}{m^2}$ el de los *m* será $\frac{H^2}{m}$. Con esta observacion se puede comparar la economía que resulta de subdividir la longitud del puente con el aumento de gasto que ocasiona el establecimiento de mayor número de pilas intermedias.

119. La luz de un puente colgado no puede pasar de ciertos límites que dependen de la resistencia del hierro, pues se concibe

que puede haber un alambre de tal longitud, que suspendido de sus dos extremos se rompa por su propio peso, y lo mismo sucederá con un conjunto de alambres, cualquiera que sea su número, y con mayor razon si soportan una carga además. Pero ántes de este límite hay otro á partir del cual el aumento de seccion que se habrá de dar á los cables crece con tanta rapidez cuando aumenta un poco la luz, que equivale á hacer imposible la construccion de puentes colgados, á lo ménos con la economía que preside siempre á la eleccion de este género de obras, y las proporciones de flecha y abertura convenientes.

120. Para hacer esta discusion, sustituiremos en la ecuacion (19) el valor de L en funcion de H y α (16), de lo que resulta

$$\omega = \frac{pH}{R \operatorname{sen.} \alpha - \pi(1 + \tfrac{1}{6} \operatorname{tang.}^2 \alpha - \ldots)H},$$

y si para mayor sencillez hacemos

$$R \operatorname{sen.} \alpha = b, \qquad \pi(1 + \tfrac{1}{6} \operatorname{tang.}^2 \alpha \ldots) = a,$$

es

$$\omega = \frac{pH}{b - aH}$$

y poniéndolo bajo forma entera

$$a\omega H - b\omega + pH = 0;$$

ecuacion que nos manifiesta que la luz y la seccion trasversal son entre sí como las coordenadas de un mismo punto de una hipérbola equilátera. La potencia de esta hipérbola será distinta para cada sistema de valores de p, α y R, pero las propiedades de todas serán comunes.

121. Para examinarlas, tomemos como ejes las rectas OH, OT (figura 53), y tracemos la curva, cuyo centro estará en C, en la interseccion de las dos asíntotas, distantes del orígen las longitudes

$$OH' = \frac{b}{a}, \qquad OT' = -\frac{p}{a},$$

de las cuales la primera es constante para todos los valores de p miéntras se conserven los mismos los de R y α, y la segunda es proporcional á p. Claro es que cuando $H = \frac{b}{a}$ no será posible hacer el puente, pues la seccion debe ser infinita, pero áun con luces mucho menores será tan grande, que se puede decir que es imposible ó por lo ménos inconveniente en la práctica su construccion. Por el contrario, cuando los valores de H son pequeños, los de ω les serán casi proporcionales, y la seccion de los cables aumentará poco áun cuando aumente la luz. No hay límite fijo que separe estas dos tendencias de ω á aumentar proporcionalmente á la luz, como en los puntos próximos al orígen O, y á aumentar considerablemente para variaciones insensibles de H, como en los puntos próximos á H'; pero si tiramos la tangente OD segun la cual crecerian con rigorosa proporcionalidad ω y H, y observamos que en el infinito son tangentes la curva y la recta CD, segun la cual ω es independiente de H en todos sus valores, podemos dividir á la curva en dos arcos ó porciones, desde O hasta M y desde M hasta el infinito, en los que las tendencias de la curva se aproximarán más á las de la tangente respectiva que á las de la otra. El punto M obtenido por la horizontal DM, tiene por coordenadas

$$ON = \tfrac{1}{2} OH' \qquad \text{y} \qquad NM = OT'$$

porque NM = H'D; además, segun las propiedades de la hipérbola, OD = OE, por consiguiente, H'D = OT' : debiendo ser constante el producto de las distancias á las asíntotas, tambien se verifica que

$$MD \times DC = OH' \times OT',$$

y como DC = 2OT',

$$MD = \tfrac{1}{2} OH' = ON:$$

de modo que $ON = \frac{b}{2a}$ se puede considerar como un límite del cual no conviene pasar para la semiabertura del puente, aunque no sea imposible hacerlo. El límite á que no se puede llegar absolutamente es OH', doble del anterior.

122. En cuanto á la mayor longitud que puede tener un hilo sin peso adicional, la obtendremos de la ecuacion ([19]), en que haciendo $p=0$ resulta

$$L = \frac{R \text{ sen. } \alpha}{\pi};$$

que equivale á $H = \frac{b}{a}$

En los puentes colgados, los valores más grandes que suelen darse á R y α son

$$R = 18\,000\,000 \text{ kilóg. por met. cuad.}; \text{ tang. } \alpha = 0{,}4;$$

el valor de π para el hierro es con poca diferencia

$$\pi = 7800 \text{ kilóg. por metro cúbico}$$

de modo que serán

El límite absoluto de la semiabertura.. $H = 832^m{,}50$
El límite conveniente..... $H = 416^m{,}25$

El acero, que empieza á emplearse en lugar del hierro, parece que permitiria alcanzar luces cuatro veces mayores.

Estos resultados manifiestan cómo la abertura de los puentes colgados no puede ser ilimitada, á ménos que se aumentase indefinidamente la altura de los apoyos y el ángulo de suspension, aunque puede exceder á las que hasta ahora se han usado.

CAPÍTULO VII.

Redaccion del proyecto de un puente colgado.

123. No entrando en el cuadro de nuestro plan lo que puede llamarse la arquitectura del puente, tomaremos como datos del proyecto, sin indagar las razones que los motivan, las dimensiones y disposicion que se marcan en las figuras 5 y 5A, y que nos servirán de punto de partida para mostrar la aplicacion ordenada de las fórmulas contenidas en este libro.

124. La carga de prueba, á la cual se arregla el cálculo de todas las dimensiones, está generalmente prescrita por las disposiciones reglamentarias de la administracion, pero no debe pasar de un peso de 200 kilógramos por metro cuadrado del tablero, lo cual equivale á suponer el piso lleno enteramente de hombres. Esto es suficiente, porque los carruajes más cargados no producen por unidad de superficie el tanto que le corresponde por la carga de prueba. En los ferro-carriles, la prueba consiste en llenar todas las vias con trenes de locomotoras en reposo y con diferentes velocidades. Á veces tambien se observa el efecto del paso del tren sobre una cuña situada en el carril.

125. *Suelo.* Al proyectar el tablero, la primera condicion que debe llenarse es que todas las piezas del armazon estén perfectamente trabadas entre sí, con lo cual se conseguirá que el esfuerzo de las cargas accidentales se reparta en un número mayor de viguetas, péndolas y cables, haciendo menor de este modo la deformacion general del sistema. Esta misma trabazon hará ménos flexible el tablero, y las oscilaciones verticales, así como las lon-

gitudinales y las ocasionadas por el viento quedarán destruidas por la rigidez de esta parte, que contribuirá indudablemente á que se amortigüen con prontitud las de las demas de la suspension: por igual motivo conviene unir sólidamente á los estribos los extremos de los largueros. Los antepechos pueden llenar el mismo objeto y aumentar este efecto si se les da la forma de celosías.

La segunda condicion que es esencial en nuestra opinion, es que el tablero no sea de un peso poco considerable comparado tanto con el de la suspension como con el de las cargas accidentales que más comunmente hayan de pasar por él. Bien es verdad que esto ocasiona un gasto mayor por la cantidad de hierro que se necesita de más para los cables y las péndolas; pero este gasto es mucho menor de lo que aparece á primera vista, pues aunque el peso permanente aumenta, tambien sucede que siendo entónces menor la intensidad de los choques producidos por una misma masa, el coeficiente de resistencia puede ser algo más elevado, produciendo por su parte economía en el material que se ha de emplear, al paso que se aumenta la duracion, seguridad y beneficios de la obra.

126. La distancia entre las viguetas se comprende siempre entre $1,^{m}00$ y $1,^{m}50$, atendidas las dimensiones ordinarias de los tablones: aquí la fijamos en $1,^{m}227$, para que resulte la luz dividida en 163 partes iguales, correspondiendo 81 viguetas á cada mitad. La longitud de cada vigueta será de 8 metros, para que queden 50 centímetros de madera por fuera de cada péndola, y el tablero se compondrá de una capa de tablones de 8 centímetros, y otra trasversal de tablas de 5 centímetros de espesor; ligado todo por riostras diagonales y una barandilla de madera por cada lado. Haciendo la seccion de la vigueta de 34 por 22 centímetros, su carga por metro lineal se puede contar como sigue:

Peso propio	50,00 kils.
Peso de $1,^{m}227$ de tablero	108,80
Accesorios (sin la barandilla)	5,80
Carga de prueba	245,40
TOTAL	410,00

Este peso produce por milímetro cuadrado la máxima presion

$$R = \frac{6}{8} \cdot \frac{0,410 \times 49\,000\,000}{220 \times 340^2} = 0^{k},6$$

que es muy suficiente para la seguridad. Y aunque algunas cargas accidentales puedan producir sobre un punto un peso mayor que el que corresponde por la de prueba, debe considerarse que por la trabazon del suelo y la flexibilidad de la obra, este peso se repartirá sobre cuatro ó cinco viguetas, y no habrá nunca que temer por la solidez.

127. *Cables.* Siendo 200 metros la luz y 15^{m} la flecha dadas para los cables, se pueden desde luego preparar los elementos siguientes:

H	100^{m},
f	15^{m},
tang. α	0,300,
sen. α	0,287,
cos. α	0,958,

y en seguida se calculará la longitud

$$L = 100\left[1 + \tfrac{1}{6}(0,3)^2 - \tfrac{1}{40}(0,3)^4\right] = 101^{m},480:$$

el tercer término aprecia 20 milímetros, aproximacion de que se puede prescindir casi siempre.

El peso por unidad de longitud horizontal se compone así:

Suelo	Viguetas	326	1000 kils.
	Tablero	598	
	Accessorios (inclusa barandilla)	76	
Tension máxima del cable inverso (incluso su peso)			400
Peso permanente			1400
Carga de prueba en 7^{m} de anchura			1400
TOTAL			2800

128. La tension máxima permanente á que se debe someter el hierro es una cuestion de la mayor importancia, y cuyo descuido ó mala inteligencia ha producido los más funestos resultados. Las costumbres de muchos constructores y las prescripciones legales que á ellas se han ajustado, juzgan segura una obra de esta clase cuando la tension mayor que sufre el hierro en el momento de la prueba no pasa de la cuarta parte de la que produce la rotura, tension que suele ser para las barras de hierro de 12 kilógramos por milímetro cuadrado, y de 18 para los cables de alambre. Estos límites, sin embargo, tomados absolutamente como siempre sucede, no pueden dar seguridad ninguna acerca de la solidez de la obra por las razones siguientes:

1.ª Fijándonos en los cables de alambre, puede haber algunos que carezcan de la resistencia absoluta de rotura de 72 kilógramos por milímetro cuadrado, en cuyo caso fallaria la regla de la tension legal de los 18 kilógramos.

2.ª Suponiendo que se ensaye préviamente, segun se acostumbra, la resistencia absoluta del material empleado, y sea esta suficiente, cabe aún gran variedad en la carga que hace pasar el límite de la elasticidad perfecta en las diferentes clases de alambres; de modo que, áun cuando un cable de alambre sufra la carga de prueba sin alteracion, y por consiguiente pueda sufrir cargas iguales ó menores indefinidamente, otro cable de la misma resistencia absoluta sufrirá una alteracion, insensible si se quiere, en el acto de la prueba, pero habiendo perdido algo de sus propiedades elásticas, por poco que sea, caminará cada vez más rápidamente hácia su alteracion completa; y aunque el límite de rotura estuviese más distante que en el primero, llegaria más pronto á él. Bien es verdad que el alambre dulce tiene la ventaja de manifestar por una gran deformacion un pequeño deterioro de esta clase; pero esto no sirve más que para aminorar el mal y de ningun modo para remediarlo.

3.ª El éxito de la prueba deja en el ánimo del constructor y de sus inspectores una gran confianza acerca de la solidez del puente; pero no siempre estará bien fundada esta opinion, pues la carga de prueba, por grande que sea, está en reposo, y se coloca poco á poco, al paso que una carga mucho más pequeña,

pero que caiga chocando sobre el tablero, puede producir un efecto mayor y por la repeticion de esos choques ya hemos visto que la masa más pequeña puede producir la ruina de la obra más fuerte y mejor construida. Sería imposible, é inconveniente además, pretender que un puente tuviese la resistencia necesaria para sufrir un número considerable de choques repetidos uniformemente y coincidentes con las oscilaciones de la suspension; pero es necesario y será muy prudente disponer los gruesos de modo que en las circunstancias ordinarias, como es el paso ó cruzamiento de dos carruajes pesados ó en el de un cierto número de hombres, puedan resistir las cadenas y péndolas un corto número de choques sin alterar su elasticidad.

De aquí se deduce que para emplearse en los puentes los alambres de hierro, es preciso que la tension máxima permanente no exceda de la cuarta parte de la que produce el alargamiento límite de elasticidad, y esta condicion exigirá por lo comun que en los cables no exceda la tension permanente ó R de 9 á 10 kilógramos por milímetro cuadrado, ni la de prueba de 18. El pliego de condiciones del puente debe exigir el experimento de la elasticidad y la rotura, no siendo ninguno de ellos suficiente por sí solo para asegurar la solidez de la obra. Para las barras de hierro deberán limitarse más los valores citados en las condiciones, haciendo R=5 ó 6 kilógramos, y á lo sumo 10 en la prueba.

129. Con estos datos se calculará la seccion por la fórmula (19)

$$\omega = \frac{2800 \times 100}{18000000 \times 0{,}287 - 101{,}480 \times 7783} = 0^{m.c},063891,$$

resultado que podremos adoptar, porque para el peso de 1400 kilógramos por metro lineal no da más que $9^k,8$ de tension por milímetro cuadrado. En seguida obtenemos:

Peso del metro lineal de cables.....	490^k
Diámetro de un alambre.....	0,003
Area de su seccion.....	0,00000707
Número de alambres.....	9040

130. Podemos fijar el número de cables en dos por cada lado. La seccion de las cadenas, mayor que la de las barras de hierro de que se podia disponer para formarlas, obligaba al principio á multiplicar su número hasta el punto de haber puesto 16 en el puente de Menai, en Inglaterra. El uso de los cables de alambre ha contribuido á disminuir este inconveniente; pero no se recomendará nunca bastante la reduccion de cables, pues cuando hay varios que sostienen un tablero, es muy fácil que el trabajo no se reparta entre ellos por igual, sobre todo en las vibraciones, y resultando uno de ellos más cargado, corre peligro de alterarse. Así, la igualdad ó uniformidad de resistencia, la trabazon y la rigidez exigen que los cables se hagan gruesos y poco numerosos, que sus flechas sean iguales, y que los de un mismo lado se fijen por lazos ó eslabones á la distancia mutua conveniente.

Resulta, pues:

Número de cables.....	4
Número de hilos de cada uno.....	2270
Diámetro de un cable.....	$0^m,180$

cuyo diámetro se calcula por la fórmula

$$D=1,1d\sqrt{\frac{4n-1}{3}},$$

siendo n el número de hilos y d su diámetro.

131. Para los cálculos sucesivos podemos ya poner los valores de las fuerzas:

Tension horizontal con la carga de prueba.	1 110 000 kils.
Idem id. permanente	643 333
Tension máxima con la carga de prueba...	1159 000
Idem id. permanente.....	671 538

132. *Fiadores.* La inclinacion de los fiadores se hace igual á la de los cables con el objeto de que la resultante de ambas tensiones sea vertical, ó se desvíe poco cuando haya rozamiento. El

arco que abrace por encima de la pila será 0,583 del radio, y como el máximo valor del coeficiente de rozamiento de las ligaduras de alambre sobre una plancha de hierro podrá ser 0,24, se tiene

$r\gamma$	0,14
$e^{r\gamma}$	1,115

y dando á los fiadores la misma seccion que á los cables, la mayor tension que aquellos podrán experimentar si se contraen con la carga de prueba sobre el tablero, será

$$18\times1,115=20^k,07 \text{ por milímetro cuadrado.}$$

efecto que no es de consecuencia alguna, vista la dificultad de que llegue á realizarse.

La longitud de los fiadores estirados es $59^m,500$; si se dejan libres y sin carga en los cables, el pandeo les aumenta $0^m,067$; y su proyeccion horizontal es $57^m,000$.

133. *Apoyos.* Cuando los apoyos son de fábrica, afectan la forma de un pórtico que sirve de entrada al puente. Daremos á cada pilar 3 metros de frente y 4 de espesor, dejando 5 metros de luz para la entrada con $10^m,50$ bajo la clave del arco. Con estos datos se puede apreciar el macizo total de fábrica en unos 500 metros cúbicos, que á 2250 kilógramos el metro cúbico dan un peso de 1 125 000 kils.

Suponiendo que el mayor razonamiento se verifica en el momento de la prueba, las fórmulas ([28]) dan:

Mayor empuje horizontal.....	109675^k
Menor presion vertical.....	631733

La distancia del eje de la base á que pasa la resultante de estas fuerzas es

$$\frac{109675\times17}{1125000+631733}=1^m,06;$$

ó sea á $0^m,94$ de la arista exterior, y la mayor presion por milímetro cuadrado que en ésta se verifique será

$$\frac{2\times 1756733}{3\times 6000\times 940}=0^k,2\,;$$

esfuerzo que no es exagerado si se emplean calizas de regular calidad.

Dando al macizo de 10 metros de altura en que se apoya el pórtico 30 centímetros de resalto y $^1/_{10}$ de talud por cada lado, con 12 metros de longitud, se puede apreciar su volúmen en 670 metros cúbicos, y su peso en 1 500 000 kils. El empuje de las tierras que forman la avenida equivale á unos 326000 kilógramos, de modo que el punto de aplicacion de la resultante en la base dista próximamente de su eje

$$\frac{109675\times 27+326000\times 3,333}{1500000+1125000+631733}=1^m,24\,;$$

el espacio que queda hasta la arista exterior es $2^m,06$, y la máxima presion por milímetro cuadrado

$$\frac{2\times 3256733}{3\times 12000\times 2060}=0^k,09.$$

134. *Amarras.* Constituye la amarra (fig. 5B) un macizo del cual consideremos como útil para la resistencia la parte comprendida entre los planos E*b* y E*c*, que pasan por el extremo del fiador prolongado. Se pueden apreciar sus dimensiones en 20 metros de longitud, 10 de anchura y 6 de alto, que es el peso abrazado por la prolongacion de los fiadores que dan vuelta por dentro de las galerías hechas con este fin. Con un coeficiente de rozamiento igual á 0,6, este macizo necesita una fuerza horizontal de 1600 toneladas para moverse sobre su base, no contando con la adherencia ni la resistencia del terraplen. No contando tampoco con la esmerada trabazon que se da á los materiales, y apreciando en 3500 kilógramos por metro cuadrado la adherencia de los mor-

teros, la línea E*e* de más fácil rotura por traslacion, forma con la horizontal un ángulo cuya tangente es 0,90 ; y la componente horizontal de la tension necesaria en el fiador para vencer esta resistencia es de 1290 toneladas.

La misma componente que haria girar sobre su base á todo el macizo, sin contar más que su peso, sería de 4500 toneladas ; y como todas las fuerzas dichas son mayores que la tension horizontal más grande que pueda ocurrir en el momento de la prueba, estaremos seguros de la firmeza de la amarra en todos casos. No hemos entrado en el pormenor de las fórmulas que conducen á estos resultados, porque ni son difíciles ni corresponden al objeto de esta obra.

135. *Bombeo.* La variacion extrema de temperatura en todo el año se aprecia en 40°, y el coeficiente de dilatacion para un grado de temperatura viene á ser de 0,00001 por las observaciones que hizo Noyon al efecto. Resulta de estos datos :

δo	0,0004
$\lambda+\lambda_1$	$0^m,073$
$\frac{\varphi}{\lambda}$ (apreciando dos términos)	5,13
φ	$0^m,375$

La dilatacion de la péndola central es despreciable.

La mayor carga que puede acumularse en un corto espacio será la de dos galeras que se crucen y algunas personas que llenen el resto del ancho entre barandillas. Este peso no pasará de ..... 12000 kils.

Menor carga de los cables por metro lineal..	1490
Descenso del punto medio.....	$0^m,302$

Con estos elementos se compone así la flecha del tablero :

Descenso por cambio de temperatura.....	$0^m,375$
Doble del causado por la carga accidental....	$0^m,604$
Flecha mínima que ha de conservar.....	$0^m,221$
Flecha de mayor bombeo.....	$1^m,200$

136. *Péndolas.* El peso, inclusa la carga de prueba, que corresponde á cada par de péndolas, es

$$2800 \times 1^{m},227 = 3436 \text{ kilógramos.}$$

y su seccion trasversal

$$\frac{3436}{6} = 573 \text{ milímetros cuadrados;}$$

cuya superficie resultará poniendo á cada extremo de la vigueta una péndola cilíndrica de 2 centímetros de diámetro y $2^{k},40$ de peso por metro lineal.

Ahora se deducirán por este órden los elementos para calcular la longitud de cada péndola:

$f+f'$, suma de las flechas de cable y tablero.....	$16^{m},200$
e, distancia entre las dos curvas.....	$0^{m},800$
N, número de órden que corresponde al apoyo.....	82
A, diferencia segunda constante.....	$0^{m},004878$
y_1, primera ordenada.....	$0^{m},800610$

Estos valores deben aproximarse hasta las millonésimas, porque el error que se cometa en A resulta en la última ordenada 3321 veces mayor.

137. Despues de calculadas por sumas sucesivas todas las 81 péndolas, y visto que sale $17^{m},000$ para la 82, que es el apoyo, se pasa á corregir en la montea la diferencia con la curva real de equilibrio. La longitud total de las péndolas de medio puente es..... 497^{m}

Su peso.....	2400^{k}
El peso de la parte variable, τ.....	2130^{k}
p_1.....	1890^{k}
p_2.....	$28^{k},50$
$\frac{p_2}{p_1}$.....	0,0151
f_2.....	$0^{m},112$
Δ, máxima diferencia.....	$0^{m},028$
Distancia del centro á que corresponde.....	$70^{m},70$
Número de la péndola en que se encuentra.....	58

Marcada en su sitio esta diferencia máxima, se corrigen las demas á ojo, porque de todos modos habrá que retocar muchas tuercas despues de suspendido el suelo.

138. *Flecha provisional.* Si el cable se fabrica en su sitio, se ha de calcular la flecha de la cadenaria que despues de cargado el tablero y hecha la prueba ha de producir la parábola definitiva. Si se fabrica en una montea horizontal, se ha de ver la flecha parabólica que con el peso propio y el del tablero, ha de dar la definitiva despues de la misma operacion, y si los alambres se juntan tendidos en línea recta se calcula la longitud de aquella parábola. Suponemos que se emplea el primer método.

La tonelada en cada metro de longitud del puente produce en el cable la dilatacion (47)

$$\frac{10000}{30} \cdot \frac{100}{20 \times 63891} \left(1 + \frac{(0,3)^2}{3}\right) = 0^{m},027$$

y en el fiador (50)

$$\frac{10000}{30 \times 0,958} \cdot \frac{82}{20 \times 63891} = 0^{m},022$$

ó sea un total de $0^{m},049$. El pandeo del fiador, bien se haya construido en su sitio con caballetes, bien se haya fabricado fuera en línea recta, no produce efecto sensible.

El peso del tablero y la tension del cable inverso suman...	$1^{t},400$
El tercio de la carga de prueba.....	$0^{t},467$
TOTAL.....	$1^{t},867$

Suma que producirá la dilatacion.....	$0^{m},090$
de modo que la longitud de la cadenaria deberá ser.....	$101^{m},390$
y la flecha que le corresponda, apreciando dos términos de la fórmula (4), será.....	$14^{m},500$

Este resultado corresponde á la más baja temperatura : si se opera á 24° centígrados sobre ella, se ha de bajar el vértice $0^m,189$, como se demostrará más adelante (141).

139. *Cables inversos.* La línea de altas aguas permite asegurar los cables inversos á 7 metros bajo la rasante del estribo, de modo que la mitad de la luz será :

Mitad de la luz de los cables superiores.....		$100^m,00$
Resalto del estribo.....	$0^m,30$	$1^m,00$
Ensanche del talud.....	$0^m,70$	
SEMILUZ DE LOS INVERSOS.....		$99^m,00$

La flecha se arreglará de este modo :

Altura de la cuerda bajo la rasante.....	7,00	$8^m,20$
Bombeo del tablero.....	1,20	
Espesor del suelo.....	0,47	$0^m,70$
Huelgo desde el eje de los cables.....	0,23	
FLECHA.....		7,50

Con estos datos se calculan :

tang. α.....	0,152
sen. α.....	0,150
L' (con dos términos solos).....	$99^m,378$

La seccion de los cables se hallará por la fórmula ([19]); pero como su peso propio, en lugar de añadirse á la tension dada de 400 kilógramos por metro lineal, está incluido en ella, y se halla sostenido por las péndolas del cable superior, cambiará el signo que lleva en el denominador, y la secion será :

$$\frac{400\times 99}{20\,000\,000\times 0{,}15+99{,}378\times 7783}=0^{m.c},010493.$$

Se puede adoptar la tension límite de 20 kilogramos por milímetro cuadrado, y aún más, para este caso extremo, porque los

accidentes que pudieran ocurrir en los cables inversos no tienen consecuencias desastrosas.

De esta seccion resulta :

Peso del metro lineal.....	82 k.
Número de alambres.....	1484
Diámetro de cada cable.....	$0^m,104$

Y el esfuerzo que sufren los cables en el máximo es

$$400-82=318 \text{ kils. por metro lineal.}$$

140. Por un aumento de 40° de temperatura, las flechas aumentan :

En los inversos.....	$0^m,392$	$0^m,767$
En la suspension.....	$0^m,375$	

Cada tonelada por metro lineal hace variar las flechas

En los inversos.....	$3^m,075$	$3^m,327$
En la suspension.....	$0^m,252$	
COCIENTE.....		$0^t,230$

de modo que á la mayor temperatura quedará todavía una traccion bajo el tablero de 88^k por metro lineal. La tension mínima de los inversos será

$$\frac{88}{318}\times 20=5^k,53$$

y en la suspension

$$\frac{1000+490+82+88}{3290}\times 18=9^k,08.$$

La flecha de pandeo que con aquella tension tendrá cada lado del polígono inverso no llega á $1/4$ de milímetro, y con la rigidez del cable será materialmente nula.

141. La flecha de fabricacion del cable depende de la temperatura á que se coloque. Suponiéndola de 24° sobre la mínima, la flecha definitiva de colocacion será

$$7{,}50-3{,}075\times0{,}230\times\frac{24}{40}+0{,}392\times\frac{24}{40}=7{,}311$$

la traccion á esta temperatura

$$318-230\frac{24}{40}=180^{k}$$

y la alteracion de flecha que le corresponde si está el cable sin carga

$$3{,}075\times0{,}180=0^{m},554,$$

de modo que la flecha de fabricacion en la montea será

$$7{,}311-0{,}554=6^{m},757.$$

142 Las péndolas inferiores sostienen una traccion de

$$1{,}227\times400=490^{k},8$$

á la que corresponde una seccion de

$$\frac{490{,}8}{6}=82 \text{ milímetros cuadrados}$$

cuya superficie se formará con dos péndolas cilíndricas de 11 milímetros de diámetro y $0^{k},80$ de peso por metro lineal de cada una.

Ahora se tendrá, análogamente á las superiores,

Flecha para la abscisa de 100 metros	$7^{m},652$
$f-f'$	$6^{m},452$
e	$0^{m},230$
N	82
A	0,001943
y_1	0,230243

La longitud total de las péndolas de un lado es 213,50 metros, y su peso 332 kilógramos.

143. *Oscilaciones.* Aunque las fórmulas relativas á las oscilaciones ofrecen muy poca seguridad en la magnitud absoluta de sus resultados, propongámonos averiguar por ellas cuántos pasos en cadencia con el puente podrian dar tres filas de soldados que lo llenasen de parte á parte. Suponiendo que apoyan el pié en el tablero sin velocidad inicial, lo que baje el vértice de la curva en la primera oscilacion será:

1.° z', descenso producido por la carga permanente.

2.° z'', descenso producido por la carga accidental.

3.° z'', nuevo descenso producido por la velocidad con que ésta pasa por el centro de oscilacion.

Cuando se hayan producido n oscilaciones alternadas, habrá crecido el descenso en $2nz''$, y el total será

$$z'+2(n+1)z''.$$

Si la resistencia á la rotura es m veces la permanente, este descenso no podrá pasar de mz' sin ocasionar la rotura, por consiguiente

$$n=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{z'}{z''}-1.$$

144.

El peso permanente por metro lineal es próximamente.	1600^{k}
El peso de tres soldados ocupando un metro.....	200
Su relacion, que es la z' á z''.....	8
m puede valer.....	8

Luego

$$n=27.$$

DIMENSIONES DE LOS PUENTES COLGADOS MÁS NOTABLES.

PUENTES DE CADENAS.

PUENTES.	Luz.	Flecha.	Relacion de la flecha á la luz.....	Número de cadenas.	Número de las sobrepuestas.....	ESLABONES. Número de barras de cada uno..	Longitud...	Ancho.....	Espesor....	Seccion trasversal de las cadenas reunidas.....	Distancia de las péndolas.....	Ancho del puente.	Relacion de la resistencia absoluta á la tension de prueba.....
	Mets.	*Mets.*					*Mets.*	*Mets.*	*Mets.*	*Mil. cs.*	*Ms.*	*Mets.*	
Isla de Borbon, de dos tramos..	40,2	7,40	$^1/_{10,8}$	3		2	1,42	0,035	circular	11529	1,42	5,9	»
Bamberg (Alemania).....	64,3	4,31	$^1/_{14,9}$	4	2	4	2,48	0,090	0,018	25920	1,24	8,7	3,5
Graetz (Idem).....	63,8	6,47	$^1/_{9,8}$	4		4	2,52	0,118	0,032	60320	1,25	14,5	4,4
Podiebrad (Idem).....	99,8	7,39	$^1/_{13,5}$	4	2	8	3,16	0,092	0,015	44160	1,58	7,5	2,8
Praga (Idem), de dos tramos...	132,8	9,83	$^1/_{13,5}$	8	2	6	3,16	0,105	0,015	77300	1,58	9,0	3,51
Pesth (Hungria).....	202,4	14,41	$^1/_{14,0}$	4	2	10 y 11	3,64	0,260	0,026 0,031	327208	1,80	14,0	2,7
Hammersmith (Inglaterra).....	121,8	8,96	$^1/_{13,6}$	8	2	4 con 6 4 con 3	2,68	0,127	0,025	116100	1,34	9,0	»
Menai (Idem).....	176,6	13,07	$^1/_{13,5}$	16	4	5	3,00	0,092	0,025	167700	1,50	8,51	3,0
Tweed (Idem).....	131,7	8,00	$^1/_{15,2}$	6	3	2	4,55	0,051	circular	24504	1,51	5,49	»
Seraing (Bélgica).....	105,0	7,00	$^1/_{15,0}$	4	2	4	3,08	0,100	0,025	40000	1,50	4,00	4,5

PUENTES DE ALAMBRE.

PUENTES.	Luz.	Flecha.	Relacion de la flecha á la luz.	Número de cables de cada lado.	Número de alambres de cada cable	Diámetro de los alambres.	Diámetro de los cables.	Relacion de la resistencia absoluta á la tension de prueba.
	Metros.	*Metros.*				*Milims.*	*Metros.*	
Friburgo (Suiza).....	265,2	19,28	$^1/_{13,8}$	2	1056	3,08	0,14	3,30
La Roche Bernard (Francia)...	198,2	15,20	$^1/_{13,04}$	2	1408	3,33	0,17	4,70
Cubzac (Idem), de cinco tramos.	109,0	12,00	$^1/_9$	6	202	4,00	»	»
Lorient (Idem).....	183,6	14,34	$^1/_{12,8}$	2	1650	3,01	0,16	4,09
Weeling (Estados-Unidos).....	307,7	18,50	$^1/_{16,6}$	6	550	»	»	»
Cataratas del Niágara (Idem)...	231,5	13,60	$^1/_{17}$	2 más gruesos 8 ménos	juntos 1767	»	0,13	»
Niágara (Idem).....	316,8	22,80	$^1/_{13,9}$	10	250	»	»	2,00
Niágara (ferro-carril del Canadá).	250,0	18,00	$^1/_{13,9}$	2	3640	»	0,25	5,00

INDICE.

PÁGINAS.

INTRODUCCION VII

CAPÍTULO I.—**De los cables ó cadenas.**

ARTÍCULO 1.° *Cadenas sometidas á su propio peso* 13

ARTÍCULO 2.° *Cadenas sometidas á un peso repartido uniformemente sobre su proyeccion horizontal* 16

ARTÍCULO 3.° *De la curva real de equilibrio de las cadenas de un puente colgado* 26

CAPÍTULO II.—**De los apoyos** 33

CAPÍTULO III.—**Determinacion de la flecha provisional del cable.**

ARTÍCULO 1.° *Variaciones de flecha dependientes sólo del cable* 41

ARTÍCULO 2.° *Variaciones de flecha debidas al fiador* 44

ARTÍCULO 3.° *Variaciones debidas á la movilidad del apoyo.* 47

CAPÍTULO IV.—**Variaciones accidentales de la flecha definitiva.**

ARTÍCULO 1.° *Influencia de las variaciones de temperatura.* 49

ARTÍCULO 2.° *Variaciones producidas por una carga accidental* 54

CAPÍTULO V.—**Movimientos de oscilacion.**

ARTÍCULO 1.° *Oscilaciones ocasionadas por la elasticidad de las péndolas y el cable* 64

ARTÍCULO 2.° *Oscilaciones debidas á la flexibilidad de la construccion* 73

ARTÍCULO 3.° *Oscilaciones horizontales* 74

CAPÍTULO VI.—**De los principales sistemas de puentes colgados.** 77

CAPÍTULO VII.—**Redaccion del proyecto de un puente colgado.** 93

Dimensiones de los puentes colgados más notables 108

TEORÍA

DE LOS

PUENTES COLGADOS

POR

DON EDUARDO SAAVEDRA,

INGENIERO JEFE DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.

LÁMINAS.

SEGUNDA EDICION.

MADRID
IMPRENTA NACIONAL
1865.

Fig. 1.

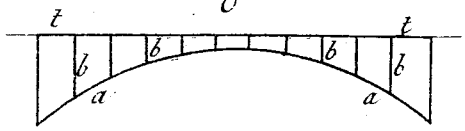


Fig. 2

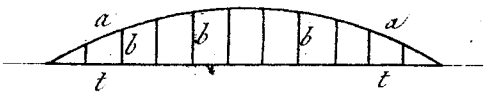


Fig. 3.

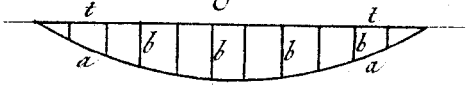


Fig. 4

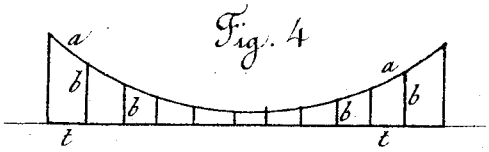


Fig. 6.

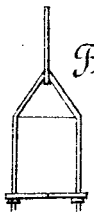


Fig. 7

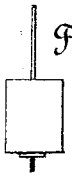


Fig. 8.

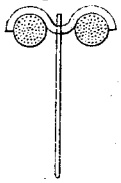


Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

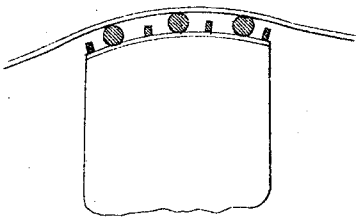


Fig. 12.

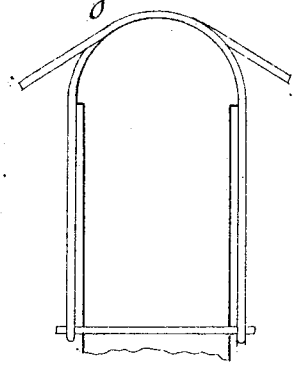


Fig. 13.

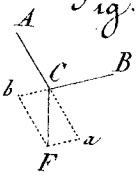


Fig. 14.

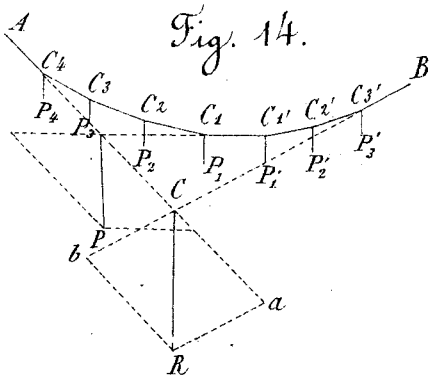


Fig. 15.

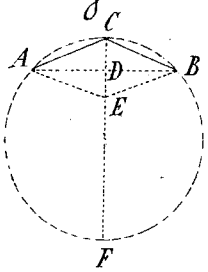


Fig. 16

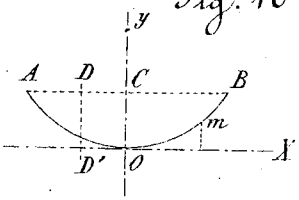


Fig. 18.

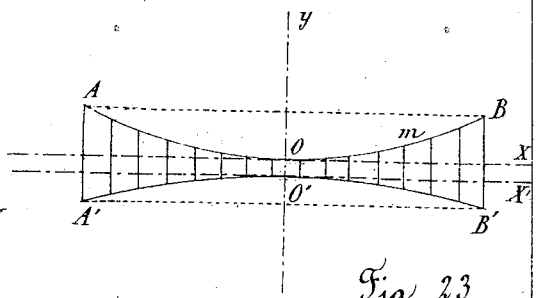


Fig. 17

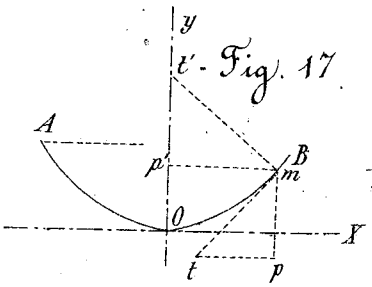


Fig. 19.

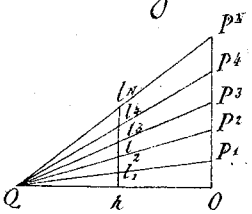


Fig. 20

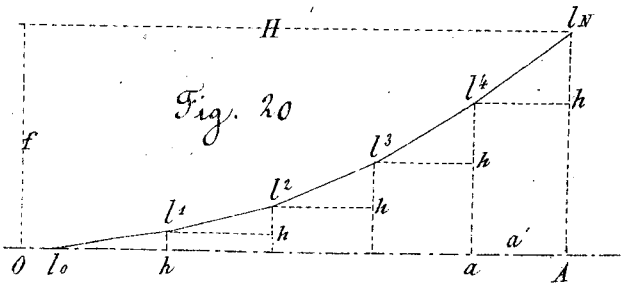


Fig. 22.

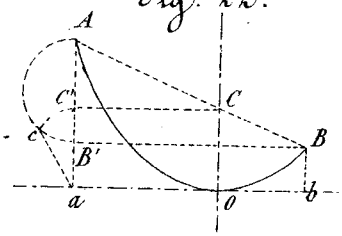
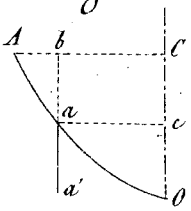


Fig. 23.



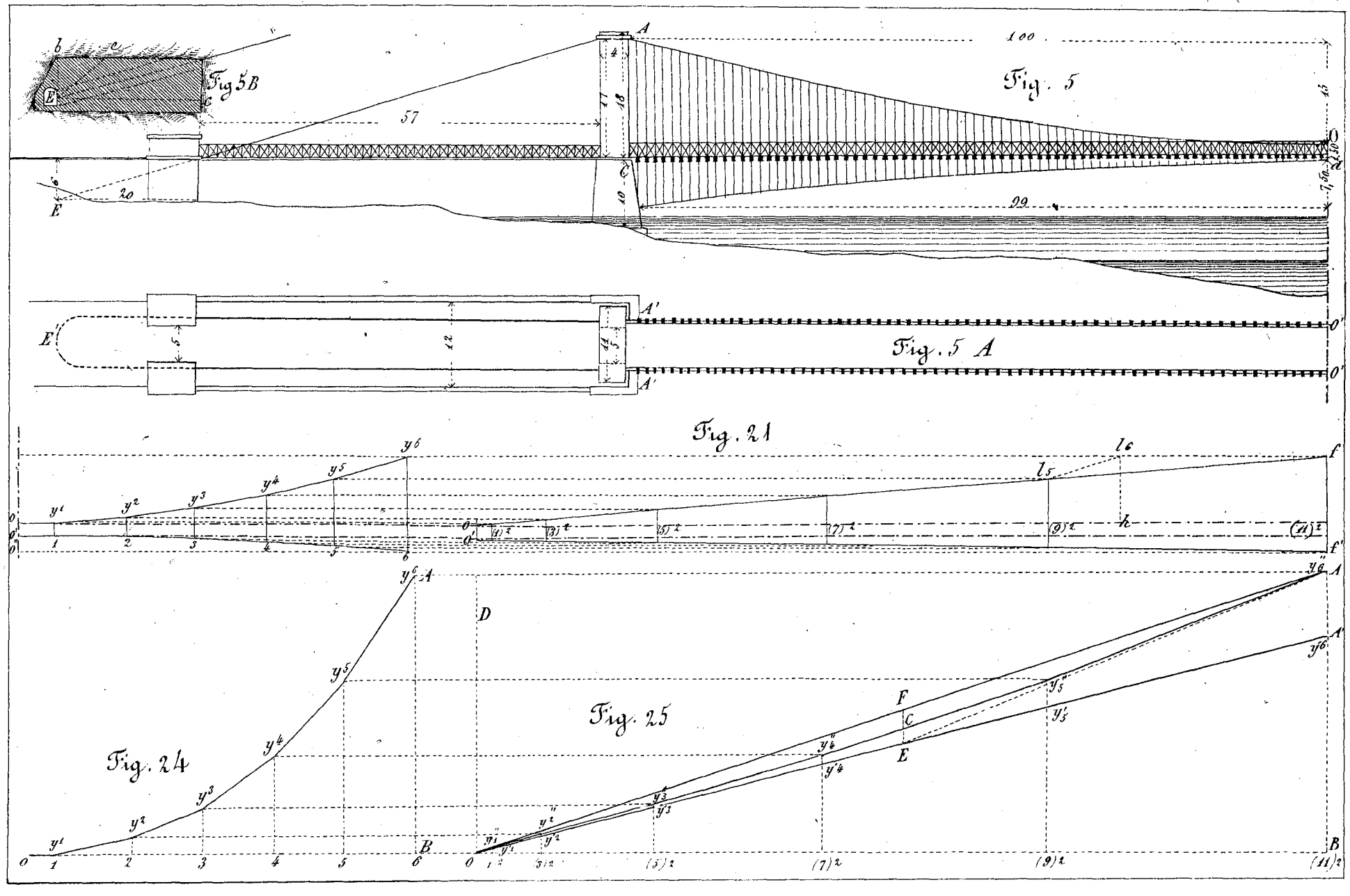


Fig. 5B
Fig. 5
Fig. 5 A
Fig. 21
Fig. 24
Fig. 25

Fig. 26.

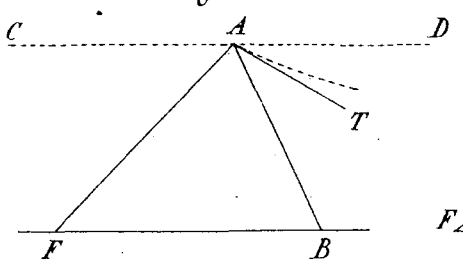


Fig. 27.

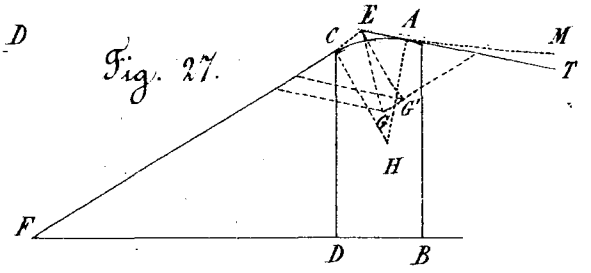


Fig. 28.

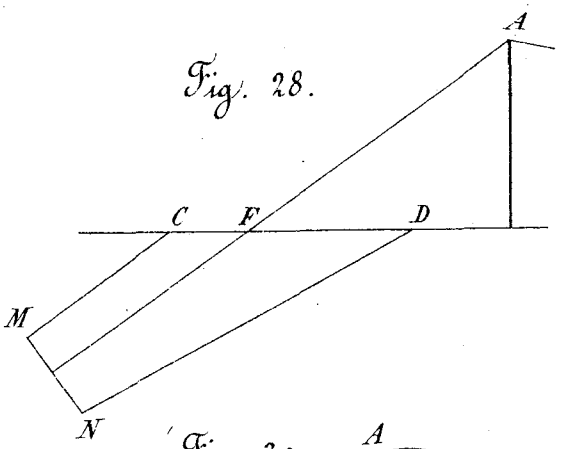


Fig. 29

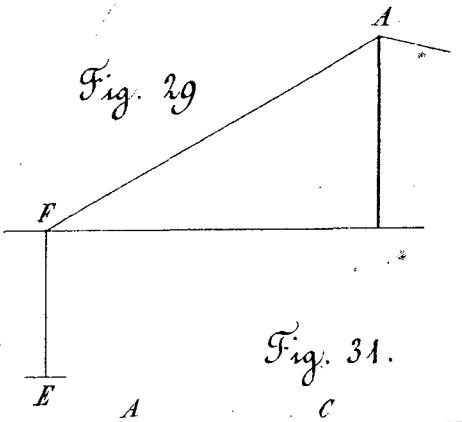


Fig. 31.

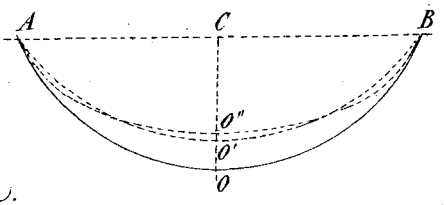


Fig. 30.

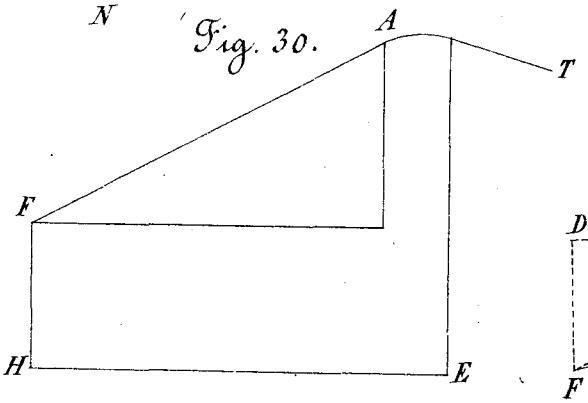


Fig. 32.

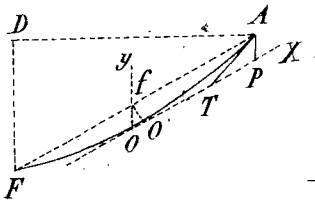


Fig. 33.

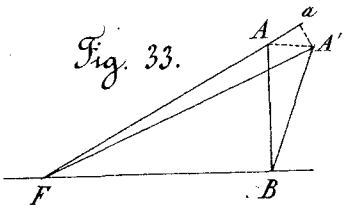


Fig. 34

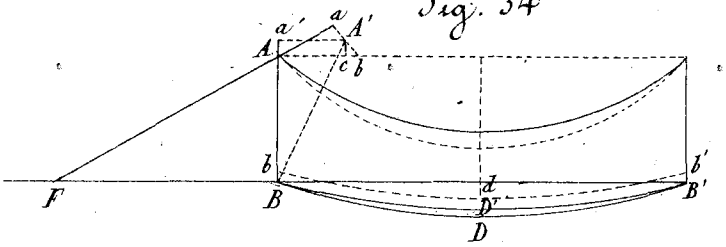


Fig. 36.

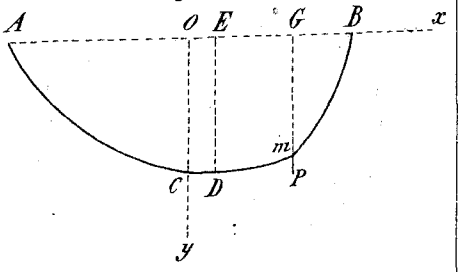


Fig. 35

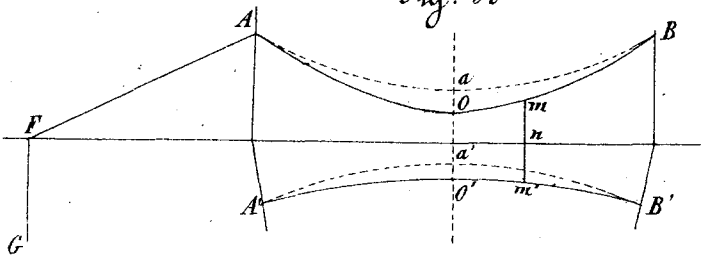


Fig. 37

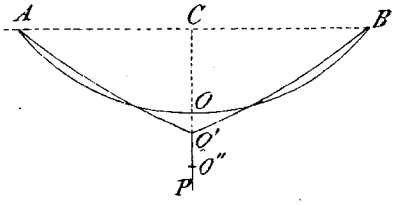


Fig. 38.

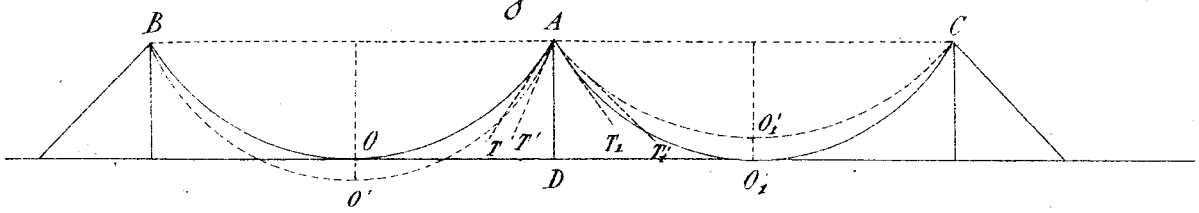


Fig. 39.

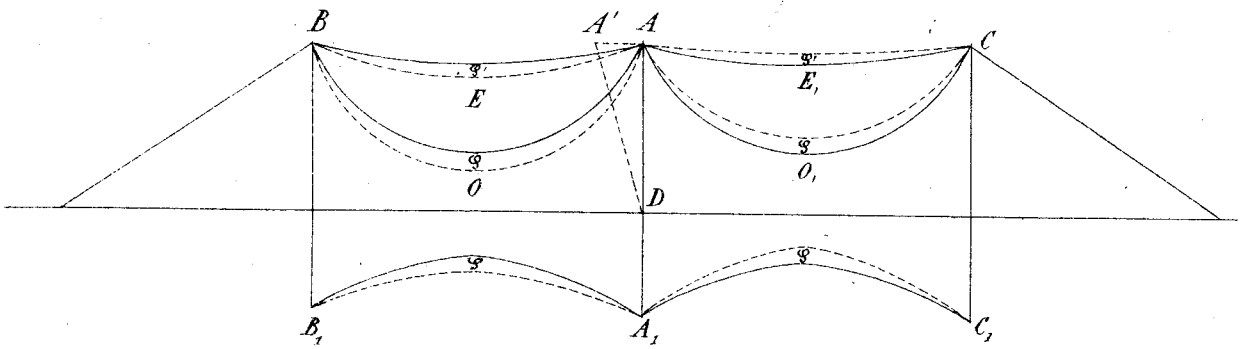


Fig. 40

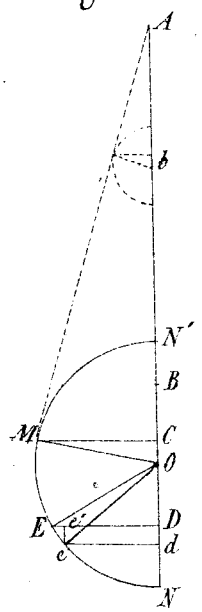


Fig. 41.

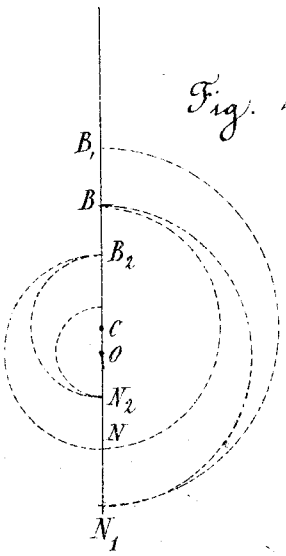


Fig. 42

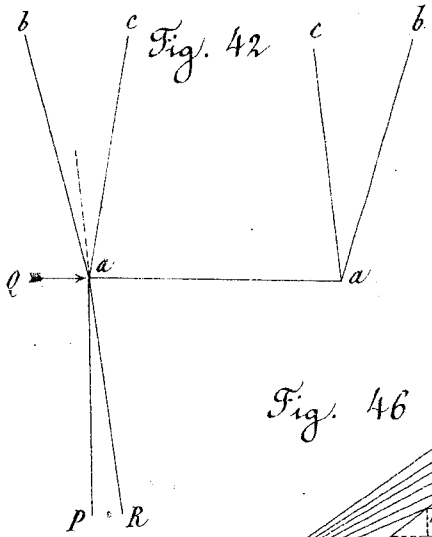


Fig. 46

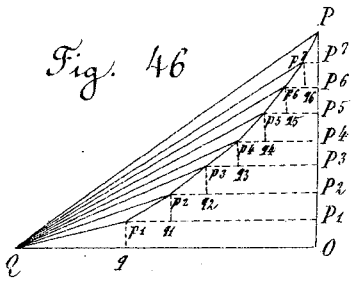


Fig. 43

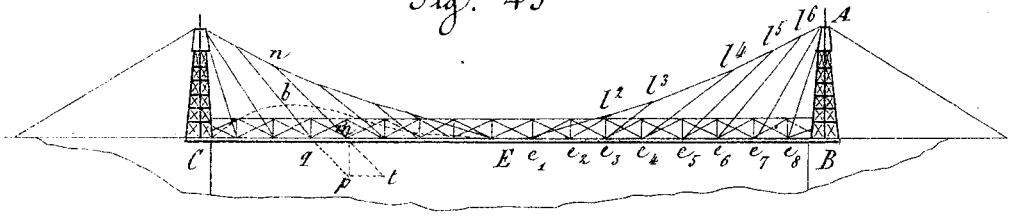


Fig. 44.

Fig. 45

Fig. 47

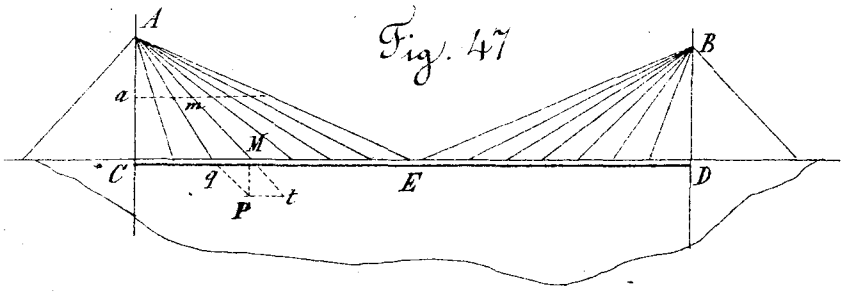


Fig. 53.

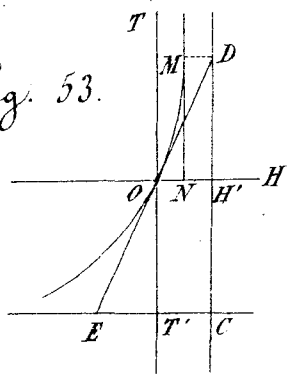


Fig. 48.

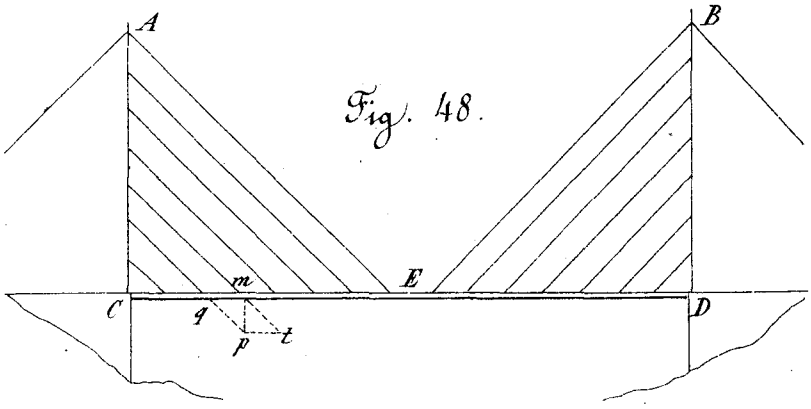


Fig. 51

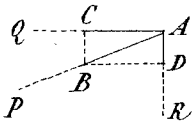


Fig. 49.

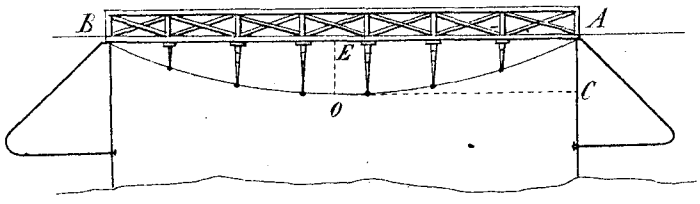


Fig. 52

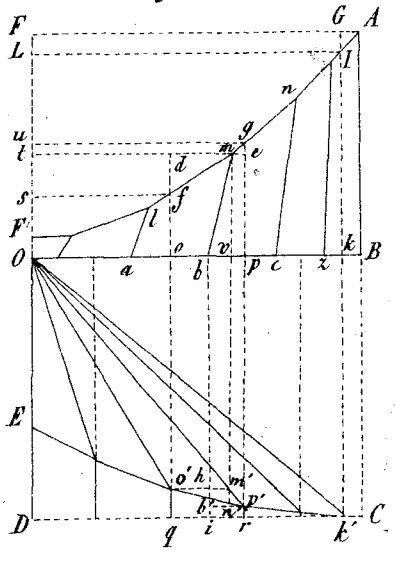
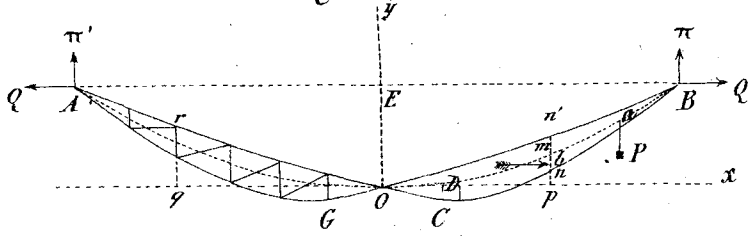


Fig. 50



ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice:	Léase:
XI	10, 13 y 15	C′	C'_1
Ibid.	18	esta	este
20	2	(10)	(10)
21	1	$\frac{1}{3}(f+f'+e)$	$(\frac{1}{3}(f+f')+e)$
27	3	(13) y (14)	(13) y (14)
Ib.	9	(9)	(9)
31	6	OM	OB
Ib.	11	OA	OA′
38	22	terreon	terreno
58	15	OAO′	OAO_1
59	4	AC	de AC
62	11	$+(b-b_1)$	$-(b+b_1)$
87	18	FO	FO (fig. 52)
99	22	razonamiento	rozamiento